

Exercice 3

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse donnée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère :

- les points $S(-1; \sqrt{2}; -4)$, $A(2; \sqrt{2}; -1)$, $B(1; \sqrt{2}; 0)$ et $C(2; 0; -1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :
$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = \sqrt{2}k \\ z = -1 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} ;$$
- le plan P dont une équation cartésienne est : $x - y + 1 = 0$.

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 1 :

Le vecteur $\vec{SA}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 :

Les droites (SB) et d sont sécantes.

Affirmation 3 :

La droite d est parallèle au plan P .

Affirmation 4 :

Le projeté orthogonal de S sur le plan P est le point H de coordonnées $(-3; \sqrt{2}; -2)$.

CORRECTION

Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

Le vecteur $\vec{SA}$ est normal au plan (ABC) si et seulement si le vecteur $\vec{SA}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC) par exemples $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires car les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$\vec{SA} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{SA} \cdot \vec{AB} = 3 \times (-1) + 0 \times 0 + 3 \times 1 = 0$$

$$\vec{SA} \cdot \vec{AC} = 3 \times 1 + 0 \times (-\sqrt{2}) + 3 \times (-1) = 0$$

donc $\vec{SA}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : FAUSSE

Preuve

(SB) est la droite passant par $S(-1; \sqrt{2}; -4)$ et de vecteur directeur $\vec{SB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ on obtient pour représentation

$$\text{paramétrique (SB): } \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 0 \times t - \sqrt{2} \\ z = 4t - 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour déterminer si les droites (SB) et d sont sécantes, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 2 - k = 2t - 1 & (1) \\ \sqrt{2}k = \sqrt{2} & (2) \\ -1 - k = 4t - 4 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \quad k = 1 \quad (1) \quad 1 = 2t - 1 \Leftrightarrow t = 1 \quad (3) \quad -1 - 1 = -2 \neq 4 - 4$$

donc les droites (SB) et d ne sont pas sécantes.

Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

On détermine l'intersection du plan P et de la droite d.

$$\text{On résout le système : } \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x = 2 - k \\ y = \sqrt{2}k \\ z = -1 - k \end{cases} \quad \text{on obtient : } 2 - k - (-1 - k) + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 \times k + 4 = 0$$

Cette équation n'admet pas de solution, donc le plan P et la droite d ne sont pas sécants.

La droite d est parallèle au plan P.

Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

H est le projeté orthogonal de S sur le plan P si et seulement si H appartient au plan P et $\vec{SH}$ est un vecteur normal au plan P.

$$P: x - z + 1 = 0 \quad H(-3; \sqrt{2}; -2) \quad \text{donc} \quad -3 + 2 + 1 = 0 \quad \text{et} \quad H \in P.$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal au plan P. } \vec{SH} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \vec{SH} = -2\vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{SH} \text{ est normal au plan P.}$$

H est le projeté orthogonal de S sur le plan P.

