

Exercice 4

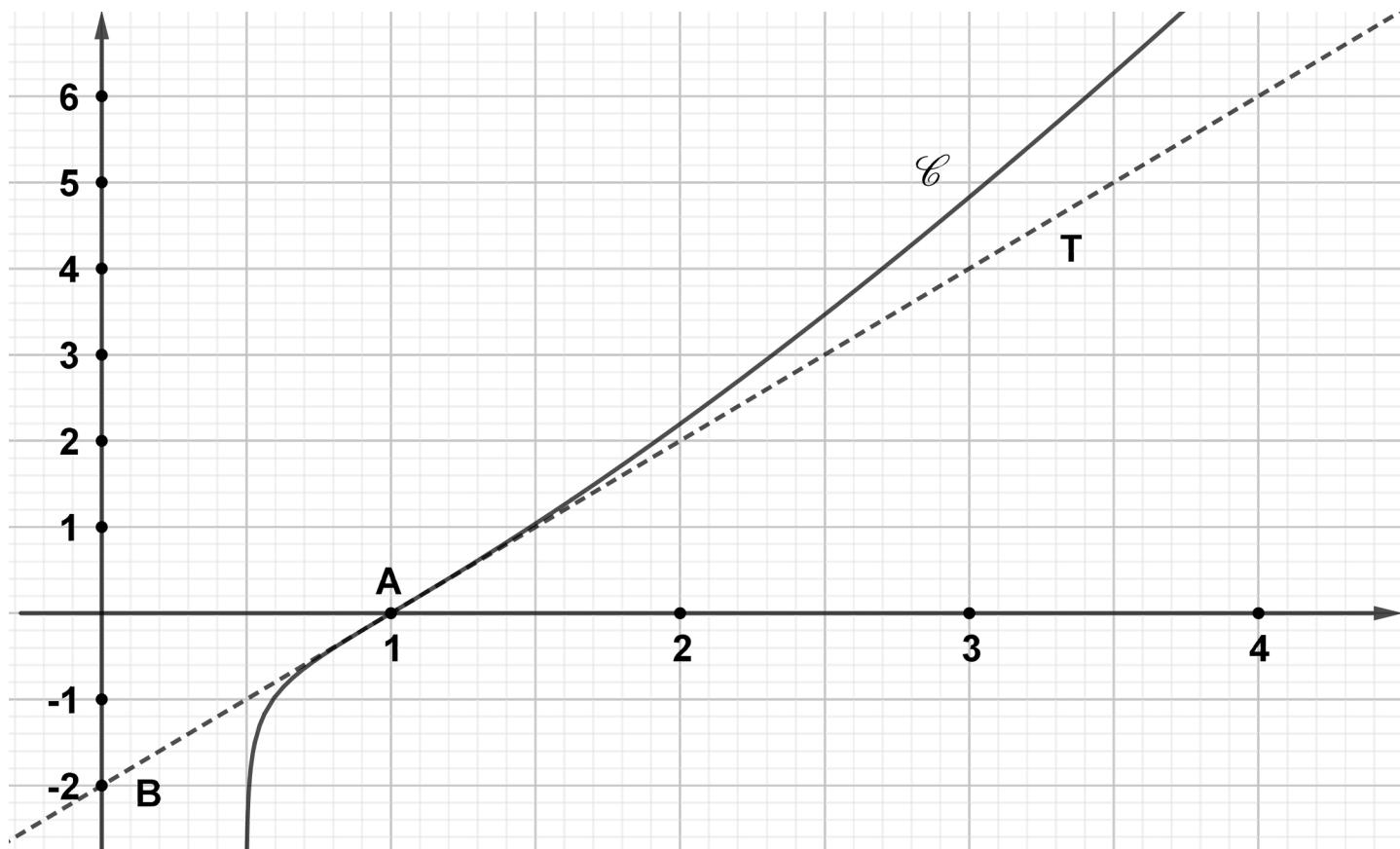
6 points

Partie A : lecture graphique

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

On a tracé, dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction f , notée $\mathcal{C}$, ainsi que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point $A(1;0)$. on précise que T passe par le point $B(0;-2)$.

On répondra aux questions suivantes en justifiant à l'aide du graphique.



1. Déterminer $f'(1)$.
2. La fonction f est-elle concave sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.
3. Déterminer $f''(1)$.

Partie B : étude de fonction

On admet que la fonction représentée graphiquement dans la partie A est définie sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ par $f(x) = x \ln(2x-1)$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On rappelle que :

- la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$, que f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.
- $\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

1. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $\frac{1}{2}$. En déduire une interprétation graphique.
2. Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.
3. On admet que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$: $f'(x) = \ln(2x-1) + \frac{2x}{2x-1}$.
- 3.a. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$: $f''(x) = \frac{4(x-1)}{(2x-1)^2}$.
- 3.b. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion et que ce point est le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.
- 4.a. Montrer que la fonction f est positive sur l'intervalle $[1; 2]$.
- 4.b. On admet que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$, on a : $\frac{x^2}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{2x-1}$
Montrer que : $\int_1^2 \frac{x^2}{2x-1} dx = 1 + \frac{1}{8} \ln(3)$
- 4.c. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$.
En vous aidant d'une intégration par parties, déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

Partie C : généralisation

On désigne par a un réel strictement positif et par f_a la fonction définie sur l'intervalle $\left] \frac{1}{a}; +\infty \right[$ par :
 $f_a(x) = x \ln(ax-1)$.

On admet que f_a est deux fois dérivable sur l'intervalle $\left] \frac{1}{a}; +\infty \right[$.

On note f'_a sa fonction dérivée, f''_a sa fonction dérivée seconde et $\mathcal{C}_a$ sa représentation graphique.

On admet que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left] \frac{1}{a}; +\infty \right[$: $f''_a(x) = \frac{a(ax-2)}{(ax-1)^2}$.

1. Montrer que pour tout réel a strictement positif, la courbe $\mathcal{C}_a$ admet un unique point d'inflexion A_a .
2. Montrer que les points A_a sont alignés, a appartenant à $]0; +\infty[$.

CORRECTION

Partie A : lecture graphique

1. $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de $T=(AB)$

$$f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 0}{0 - 1} = 2$$

2. f n'est pas concave sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ car une partie de $\mathcal{C}$ est au dessus de la tangente T .

3. $A(1;0)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ donc $f''(1)=0$.

Partie B : étude de fonction

1. $x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\quad f(x) = x \ln(2x-1)$

$$x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x-1 > 0 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x-1) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \ln(2x-1) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} 2. \quad \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ f(x) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \ln(2x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x=0 \text{ ou } \ln(2x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ \ln(2x-1) = \ln(1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 2x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x=1} \end{aligned}$$

3.a. $x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\quad f'(x) = \ln(2x-1) + \frac{2x}{2x-1}$

$$(\ln(2x-1))' = \frac{2}{2x-1} \quad \left(\frac{2x}{2x-1} \right)' = \frac{2 \times (2x-1) - 2x \times 2}{(2x-1)^2} = \frac{-2}{(2x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{2}{(2x-1)^2} = \frac{2 \times (2x-1) - 2}{(2x-1)^2} = \frac{4x-4}{(2x-1)^2} = \frac{4(x-1)}{(2x-1)^2}$$

3.b. $x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\quad (2x-1)^2 > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est le signe de $4(x-1)$.

On donne le signe de $f''(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f''(x)$		-	0 +

f'' est nulle que pour la valeur 1 en changeant de signe donc $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse 1 soit le point A (car $f(1) = 1 \times \ln(1) = 0$) qui est le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.

4.a. Si $x \geq 1$ alors $2x-1 \geq 1$ et $\ln(2x-1) \geq \ln(1) = 0$

Si $x \geq 1$ alors $\frac{2x}{2x-1} > 0$ donc $f'(x) > 0$;

f est croissante sur $[1;2]$ et $f(1)=0$ donc f est positive ou nulle sur $[1;2]$.

$$4.b. \quad x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{2x-1} = \frac{4x(2x-1) + 2 \times (2x-1) + 2}{8(2x-1)} = \frac{8x^2 - 4x + 4x - 2 + 2}{8(2x-1)} = \frac{8x^2}{8(2x-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{2x-1} &= \frac{x^2}{2x-1} \\ \cdot \int_1^2 \frac{x^2}{2x-1} dx &= \int_1^2 \frac{1}{2}x dx + \int_1^2 \frac{1}{4} dx + \int_1^2 \frac{2}{2x-1} dx \\ \int_1^2 \frac{x^2}{2x-1} dx &= \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 + \left[\frac{1}{4}x \right]_1^2 + [\ln(2x-1)]_1^2 \\ \int_1^2 \frac{x^2}{2x-1} dx &= \frac{4}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \ln(4-1) - \ln(1) = 1 + \ln(3) \end{aligned}$$

4.c. f est continue et positive sur $[1;2]$, donc l'aire du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$ est $\mathcal{A} = \int_1^2 f(x) dx$.

$$\mathcal{A} = \int_1^2 x \ln(2x-1) dx$$

$$u(x) = \ln(2x-1) \quad u'(x) = \frac{2}{2x-1} \quad v'(x) = x \quad v(x) = \frac{x^2}{2}$$

u et v sont dérivables et u' et v' sont continues.

En utilisant la formule d'intégration par parties

$$\mathcal{A} = \left[\frac{x^2}{2} \ln(2x-1) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{2x-1} \times \frac{x^2}{2} dx = \frac{4}{2} \ln(3) - \int_1^2 \frac{x^2}{2x-1} dx$$

$$\mathcal{A} = 2 \ln(3) - 1 - \frac{1}{8} \ln(3) = \frac{15}{8} \ln(3) - 1 \text{ U.A.}$$

Partie C : généralisation

$$a \in]0; +\infty[\quad x \in \left] \frac{1}{a}; +\infty \right[\quad f_a(x) = x \ln(ax-1) \quad f_a''(x) = \frac{a(ax-2)}{(ax-1)^2}.$$

1. Le signe de $f_a''(x)$ sur $\left] \frac{1}{a}; +\infty \right[$ est le signe de $ax-2$.

$$ax-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{a} > \frac{1}{a} \quad (\text{car } a > 0)$$

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{a}$	$+\infty$
$f_a''(x)$	—	0	+

f_a'' n'est nulle que pour la valeur $\frac{2}{a}$ en changeant de signe donc $\mathcal{C}_a$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\frac{2}{a}$. On note A_a ce point.

$$2. y_{A_a} = f\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{2}{a} \ln\left(a \times \frac{2}{a} - 1\right) = 0 \quad A_a\left(\frac{2}{a}; 0\right)$$

Tous les points A_a appartiennent à l'axe des abscisses (ils sont donc alignés).