

Exercice 1

6 points

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

On s'intéresse à un réseau de communication constitué d'une chaîne de relais (satellites, antennes, opérateurs ...) pour transmettre des messages.

À chaque transmission entre deux relais successifs, des erreurs peuvent apparaître dans le message.

Une étude statistique a permis d'établir que pour chaque relais :

- si le message reçu est sans erreur, il y a 94 % de chances d'être transmis sans erreur au relais suivant ;
- si le message reçu comporte des erreurs, il y a 35 % de chances que les erreurs soient corrigées et donc que le message soit transmis sans erreur au relais suivant.

On choisit au hasard un message envoyé au cours d'une journée.

Pour un événement E quelconque, on désigne par $\bar{E}$ son événement contraire et par $P(E)$ sa probabilité.

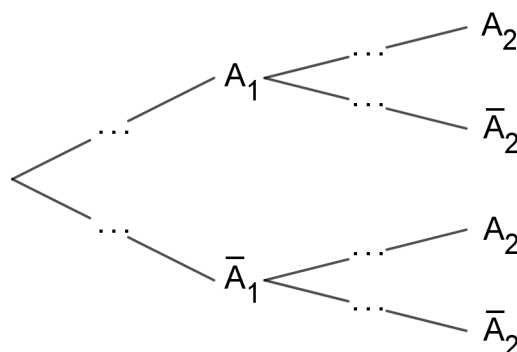
Partie A

On considère les événements suivants :

- A_1 : « le message reçu par le premier relais est sans erreur » ;
- A_2 : « le message reçu par le deuxième relais est sans erreur ».

On admet que $P(A_1) = 0,96$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Montrer que $P(A_1) = 0,9164$.

3. Calculer $P_{A_2}(\bar{A}_1)$.

On arrondira le résultat à 10^{-4} .

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour vérifier le bon fonctionnement d'un relais, des tests indépendants les uns des autres sont effectués.

Un test est positif si la présence d'au moins une erreur est détectée.

On admet que la probabilité qu'un test soit positif est égale à 0,04.

On choisit au hasard un échantillon de 50 tests réalisés sur le relais.

Le nombre de tests réalisés est suffisamment grand pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

1. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 50 tests associe le nombre de tests positifs.

Ainsi la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=0,04$.

1.a. Déterminer la probabilité que 4 tests soient positifs dans cet échantillon.

On arrondira le résultat à 10^{-2} .

1.b. Donner la probabilité qu'au moins un test soit positif dans cet échantillon.

On arrondira le résultat à 10^{-2} .

1.c. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .

2. On étudie une chaîne de transmission de l'information composée de 25 relais.

On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 50 tests pratiqués pour le relai 1 associe le nombre de tests positifs.

On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour le relai 2, ..., X_{25} pour le relai 25.

On admet que ces 25 variables sont indépendantes entre elles et qu'elles admettent la même espérance égale à 2 et la même variance égale à 1,92.

On note M la variable aléatoire donnant la moyenne du nombre de tests positifs lors des contrôles effectués sur les 25 relais.

$$\text{On a donc } M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{25}}{25}$$

2.a. Vérifier que $E(M) = 2$ et montrer que $V(M) = 0,0768$.

2.b. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que la moyenne des tests positifs soit strictement inférieure à 7 est supérieure à 0,99.

Indication : on pourra utiliser, sans justification, le fait que :

$$P(M < 7) = P(-3 < M < 7).$$

Partie C

On désigne par n un entier naturel non nul.

On s'intéresse à une chaîne de transmission de l'information composée de n relais.

On considère l'évènement A_n : « le message reçu par le $n^{\text{ième}}$ relai est sans erreur ».

On note p_n la probabilité que le message reçu au $n^{\text{ième}}$ relai est sans erreur.

On a ainsi $p_n = P(A_n)$ et $p_1 = 0,96$.

On admet que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = 0,59 p_n + 0,35.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $p_{n+1} \leq p_n$.

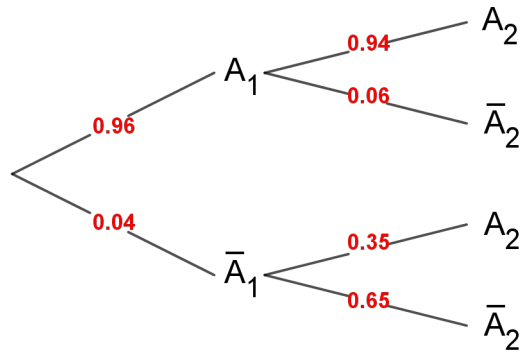
2. Montrer que la suite (p_n) est convergente.

3. Déterminer la valeur exacte de sa limite.

CORRECTION

Partie A

1. $P(A_1)=0,96$ donc $P(\bar{A}_1)=1-0,96=0,04$
 $P_{A_1}(A_2)=0,94$ donc $P_{A_1}(\bar{A}_2)=1-0,94=0,06$
 $P_{\bar{A}_1}(A_2)=0,35$ donc $P_{\bar{A}_1}(\bar{A}_2)=1-0,35=0,65$
 On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. En utilisant la formule des probabilités totales.
 $P(A_2)=P(A_1 \cap A_2)+P(\bar{A}_1 \cap A_2)=P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)+P(\bar{A}_1) \times P_{\bar{A}_1}(A_2)$
 $P(A_2)=0,96 \times 0,94+0,04 \times 0,35=0,9024+0,0140=0,9164$

3. $P_{A_2}(\bar{A}_1)=\frac{P(\bar{A}_1 \cap A_2)}{P(A_2)}=\frac{0,0140}{0,9164}=\frac{140}{9164}=0,0153$ à 10^{-4} près.

Partie B

1.a. $P(X=4)=\binom{50}{4} \times 0,04^4 \times 0,96^{46} \simeq 0,902$ $P(X=4)=0,09$ à 10^{-2} près.

1.b. $P(X \geq 1)=1-P(X=0)=1-0,96^{50} \simeq 1-0,1299=0,8701$ $P(X \geq 1)=0,87$ à 10^{-2} près.

1.c. $E(X)=np=50 \times 0,04=2$
 $V(X)=np(1-p)=50 \times 0,04 \times 0,96=1,92$

- 2.a. Les 25 variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_{25}$ ont la même loi de probabilité donc :
 $E(X_1)=E(X_2)=\dots=E(X_{25})=2$ et $V(X_1)=V(X_2)=\dots=V(X_{25})=1,92$

$$E(M)=E\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_{25}}{25}\right)=\frac{1}{25}E(X_1+X_2+\dots+X_{25})=\frac{1}{25} \times (25E(X_1))=E(X_1)=2$$

Les 25 variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_{25}$ sont indépendantes donc :

$$V(X_1+X_2+\dots+X_{25})=V(X_1)+V(X_2)+\dots+V(X_{25})=25V(X_1)$$

$$V(M)=V\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_{25}}{25}\right)=\frac{1}{25^2}V(X_1+X_2+\dots+X_{25})=\frac{25V(X_1)}{25^2}=\frac{1,92}{25}=0,0768$$

- 2.b. On considère L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\text{Si } t>0 \text{ alors } P(|X-E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

$$\text{Pour } X=M \text{ et } t=5 \text{ on obtient : } P(|M-2| \geq 5) \leq \frac{V(M)}{5^2}$$

$$\text{donc } P(|M-2| \geq 5) \leq \frac{0,0768}{25}=0,003074$$

$$\text{Pour l'évènement contraire : } P(|M-2| < 5)=1-P(|M-2| \geq 5) \geq 1-0,003074 > 0,99$$

$$P(|M-2| < 5)=P(-5 < M-2 < 5)=P(-3 < M < 7)=P(M < 7)$$

$$\text{donc } P(M < 7) \geq 0,99$$

Partie C

1. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a :

$$p_{n+1} \leq p_n .$$

Initialisation

$$p_1 = 0,96 \text{ et } p_2 = 0,9164 \text{ donc } p_2 \leq p_1 .$$

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que $p_{n+1} \leq p_n$ et on doit démontrer que $p_{n+2} \leq p_{n+1}$.

$$\text{Si } p_{n+1} \leq p_n \text{ alors } 0,59 p_{n+1} + 0,35 \leq 0,59 p_n + 0,35 \text{ soit } p_{n+2} \leq p_{n+1} .$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n non nul, on a $p_{n+1} \leq p_n$.

2. On a pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} \leq p_n$ donc la suite (p_n) est décroissante.

On a aussi $0 \leq p_n \leq 1$ donc la suite (p_n) est minorée par 0.

Toute suite décroissante et minorée est convergente donc la suite (p_n) est convergente.

3. On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = L$

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $p_{n+1} = 0,59 p_n + 0,35$ donc :

$$L = 0,59 L + 0,35 \Leftrightarrow 0,41 L = 0,35 \Leftrightarrow L = \frac{0,35}{0,41} = \frac{35}{41}$$