

Exercice 2

5 points

Dans une salle d'escalade, un nouveau module en forme de tétraèdre, destiné à être posé au sol, et en cours de fabrication.

Ce module servira à créer des plans inclinés.

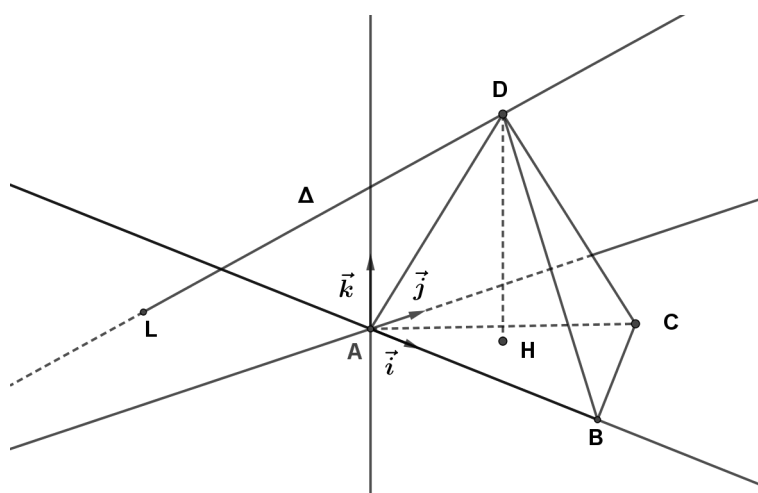
On munit l'espace d'un repère orthonormé $(A; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

L'unité est le mètre.

On considère les trois points suivants : $B\left(\frac{9}{2}; 0; 0\right)$ $C\left(\frac{9}{4}; 3; 0\right)$ $D\left(\frac{3}{2}; 1; 3\right)$.

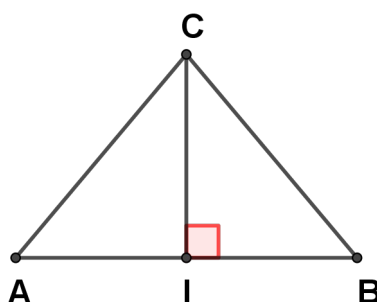
On modélise le module par le tétraèdre ABCD.

On souhaite analyser ce module pour des raisons de construction et de sécurité.



Partie A

1. On représente ci-dessous le triangle ABC et sa hauteur issue de C.



1.a. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

1.b. Montrer que l'aire du triangle est égale à $6,75 \text{ m}^2$.

2.a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $z=0$.

2.b. Montrer que le point $H\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

3. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
En déduire le volume du tétraèdre.

Partie B

1. On considère le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

1.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est :

$$4x + 3y + 3z - 18 = 0.$$

1.c. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (BCD) et passant par D.

2. On admet que la droite Δ et le plan sont sécants et on désigne par L leur intersection.

Montrer que L a pour coordonnées $\left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right)$.

3. Le module est considéré adapté aux débutants si l'angle $\widehat{LDH}$ est strictement inférieur à 60° .

Montrer que ce module est adapté aux débutants.

CORRECTION

Partie A

1.a. $A(0;0;0)$ $B\left(\frac{9}{2};0;0\right)$ $C\left(\frac{9}{4};3;0\right)$

$$AC^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2 = \frac{81}{16} + 9 = \frac{81+144}{16} = \frac{225}{16} = \left(\frac{15}{4}\right)^2 \quad AC = \frac{15}{4}$$

$$BC^2 = \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right)^2 + 3^2 = \left(-\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 \quad BC = \frac{15}{4}$$

$CA=CB$ donc le triangle ABC est isocèle en C.

1.b. I est le pied de la hauteur de (ABC) issue de C, le triangle ABC est isocèle en C donc I est le milieu de [AB] et $I\left(\frac{9}{4};0;0\right)$.

$$IC^2 = \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2 = 3^2 \quad IC=3 \quad \text{et} \quad AB=\frac{9}{2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times IC = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 3 = \frac{27}{4} = 6,75$$

L'unité d'aire est m^2 donc $\mathcal{A} = 6,75 \, m^2$.

2.a. Les 3 points A, B et C ne sont pas alignés et $z_A=z_B=z_C=0$ donc A, B et C appartiennent au plan d'équation $z=0$ et le plan d'équation $z=0$ est le plan (ABC).

2.b. $D\left(\frac{3}{2};1;3\right)$ $H\left(\frac{3}{2};1;0\right)$ $\overrightarrow{HD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HD}=3\vec{k}$.

Le vecteur $\vec{k}$ est normal au plan d'équation $z=0$ (qui est le plan (ABC)) donc (HD) est une droite orthogonale au plan (ABC) et $z_H=0$ et le point H appartient au plan (ABC).

Conséquence : le point H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

3. Si on choisit pour base ABC pour le tétraèdre ABCD alors la hauteur associée à cette base est DH

$$\mathcal{B}=6,75 \quad \text{et} \quad h=3 \quad \text{donc} \quad \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 6,75 \times 3 = 6,75 \, m^3.$$

Partie B

1.a. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCD) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (BCD) par exemples $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

$$B\left(\frac{9}{2};0;0\right) \quad C\left(\frac{9}{4};3;0\right) \quad D\left(\frac{3}{2};1;3\right)$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \times \left(-\frac{9}{4}\right) + 3 \times 3 + 3 \times 0 = -9 + 9 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 4 \times (-3) + 1 \times 3 + 3 \times 3 = -12 + 12 = 0$$

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

1.b. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) donc (BCD): $4x+3y+3z+d=0$

$$B\left(\frac{9}{2};0;0\right) \quad 4 \times \frac{9}{2} + 3 \times 0 + 3 \times 0 + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 18 + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = -18$$

$$(BCD): 4x+3y+3z-18=0$$

1.c. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $D\left(\frac{3}{2};1;3\right)$ $\Delta \begin{cases} x=4t+\frac{3}{2} \\ y=3t+1 \\ z=3t+3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

2. On résout le système suivant :

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 4t + \frac{3}{2} \\ y = 3t + 1 \\ z = 3t + 3 \end{cases}$$

On obtient : $3t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

$$x = 4 \times (-1) + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \quad y = 3 \times (-1) + 1 = -2 \quad H\left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right)$$

3. $L \in (ABC)$ $H \in (ABC)$ donc la droite (LH) est contenue dans le plan (ABC).
(DH) est orthogonale au plan (ABC) donc le triangle DHL est rectangle en H.

$$DH = 3 \quad DL^2 = \left(-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + (-2 - 1)^2 + (-3)^2 = 16 + 9 + 9 = 34 \quad DL = \sqrt{34}$$

$$\cos(\widehat{LDH}) = \frac{DH}{DL} = \frac{3}{\sqrt{34}} \simeq 0,5145 \quad \widehat{LDH} \simeq 59,036 < 60^\circ$$

Le module est adapté aux débutants.