

Exercice 3

4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Justifier chaque réponse.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1.a. On considère l'équation différentielle $(E): y' + 2y = 0$, où y est une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$.

On note f la solution de l'équation différentielle (E_1) telle que $f(0) = 1$.

Affirmation 1 :

La courbe représentative de la fonction f passe par le point A de coordonnées $\left(\ln 2; \frac{1}{2}\right)$.

1.b. On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ par : $f(x) = x - \cos(x)$.

Affirmation 2 :

Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de ses tangentes.

1.c. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{x}$.

Affirmation 3 :

La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de la fonction f .

2. On considère l'équation différentielle $(E_2): y' - 3y = 2 - 6x$, où y est une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 4 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - e^{3x}$ est une solution de l'équation (E_2) .

CORRECTION

1.a. Affirmation 1 : FAUSSE

Preuve

Les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = k e^{-2x}$.

$$f_k(0) = 1 \Leftrightarrow k e^0 = 1 \Leftrightarrow k = 1 \text{ donc } f(x) = e^{-2x}.$$

$$f(\ln 2) = e^{-2 \ln 2} = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \text{ la courbe représentative de } f \text{ ne passe pas par le point } A\left(\ln 2; \frac{1}{2}\right).$$

1.b. Affirmation 2 : FAUSSE

Preuve

$$f(x) = x - \cos(x) \quad f'(x) = 1 + \sin(x) \quad f''(x) = \cos(x).$$

Pour tout réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\cos(x) \leq 0$. La fonction f est concave sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Donc la courbe représentative de f n'est pas au dessus de ses tangentes sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

1.c. Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

$$x \in]0; +\infty[\quad f(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\text{Or } -1 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ donc } -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \text{ (car } x > 0 \text{)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de f .

2. Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

$$x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2x - e^{3x} \quad f'(x) = 2 - 3e^{3x}$$

Pour tout réel x :

$$f'(x) - 3f(x) = 2 - 3e^{3x} - 3(2x - e^{3x}) = 2 - 3e^{3x} - 6x + 3e^{3x} = 2 - 6x.$$

Donc f est une solution de (E_1) .