

Exercice 4

5 points

On considère la fonction f_k définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1 + \ln x)}{x}$$

où k est un réel strictement positif et $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On désigne par $\mathcal{C}_k$ la représentation graphique de la fonction f_k dans un repère orthonormé.

On admet que la fonction f_k est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

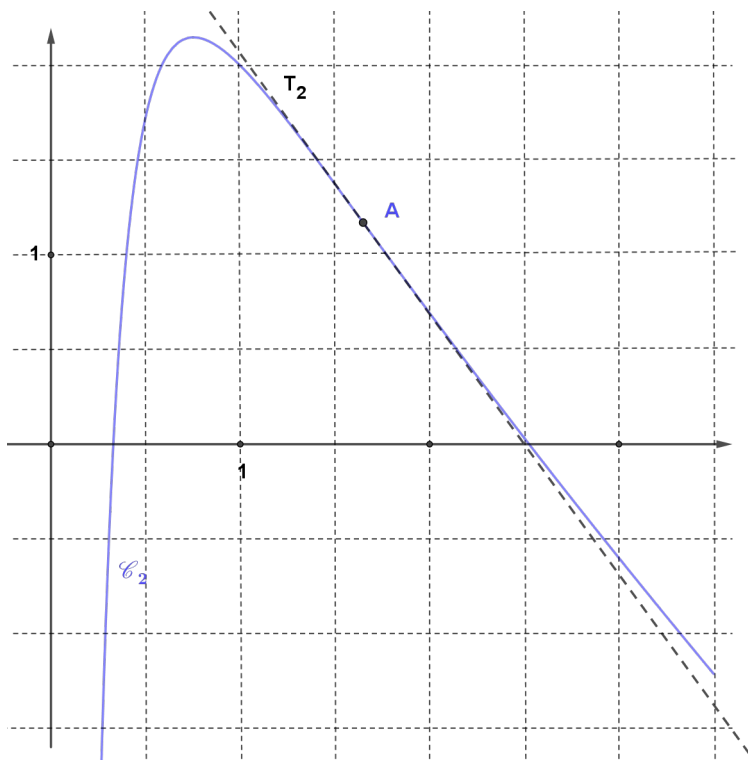
On note f'_k sa dérivée première et $f''_k(x)$ sa fonction dérivée seconde.

Partie A : étude d'un premier cas particulier

Dans cette partie, on se place dans le cas $k=2$.

La courbe $\mathcal{C}_2$ est représentée sur le graphique ci-dessous.

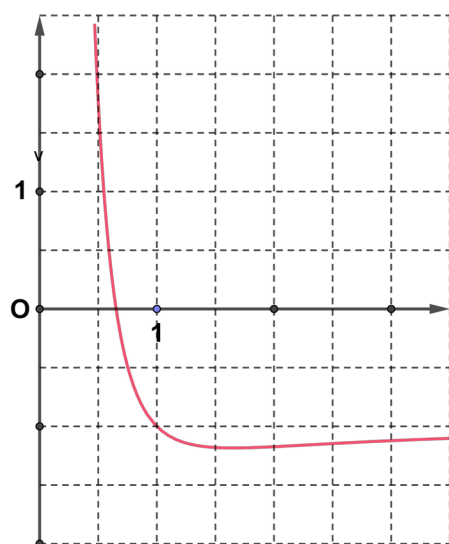
- . Le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_2$;
- . T_2 est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point A .



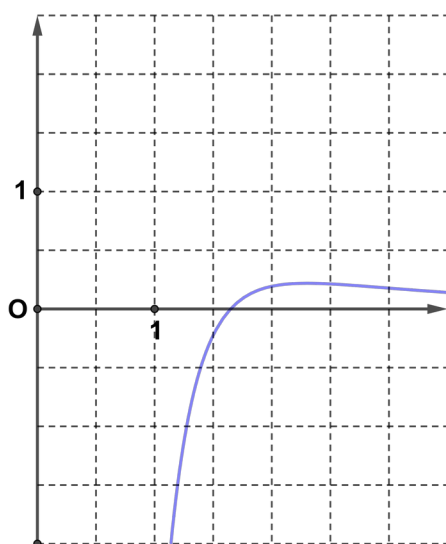
1. On considère une primitive F_2 de la fonction f_2 sur $]0;+\infty[$.

Avec la précision permise par le graphique, donner les variations de la fonction F_2 sur l'intervalle $[0;3]$.

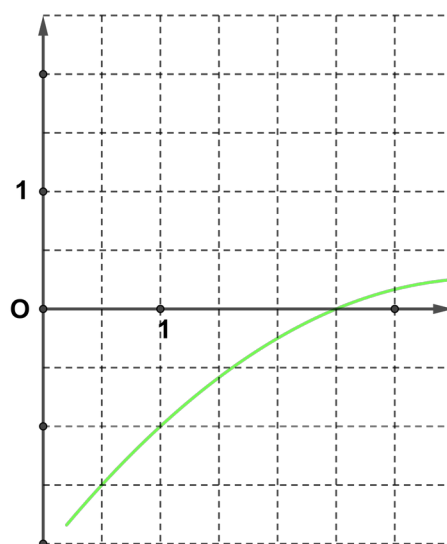
2. Parmi les trois courbes ci-après, indiquer celle qui représente f'_2 et celle qui représente f''_2 . Justifier.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Partie B : étude d'un second cas particulier

Dans cette partie on se place dans le cas $k=1$.

On considère la fonction f_1 définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_1(x) = 1 - x + \frac{1 + \ln(x)}{x}$.

1.a. Montrer que pour tout réel $x > 0$: $f_1'(x) = -1 - \frac{\ln(x)}{x^2}$.

1.b. Déterminer la limite de $f_1'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. On admet que :

. l'axe des ordonnées est une asymptote de la courbe de f_1 ;

. pour tout réel $x > 0$: $f_1''(x) = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de f_1' sur $]0; +\infty[$.

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
f_1'	$+\infty$	$-1 - \frac{1}{2e}$	-1

2.a. Justifier les variations de la fonction f_1' sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et la valeur de l'extremum.

2.b. Justifier la limite de la fonction f_1' en 0.

2.c. Montrer qu'il existe une unique solution α à l'équation $f_1'(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$.

En déduire que f_1 admet un maximum sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2.d. Recopier et compléter les pointillés du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $f_1'(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$.

```
def d(x):  
    return -1-log(x)/x**2  
  
def alpha()  
    u=0.5  
    while d(u) ... 0:  
        u= ...  
    return u
```

On rappelle que x^{**2} désigne x^2 et que $\log(x)$ désigne $\ln(x)$.

Partie C : k quelconque

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1+\ln(x)}{x}$.

et la fonction H définie sur $]0; +\infty[$ par $H(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\ln(x)}{x} \right)^2$.

On admet que H est dérivable sur $]0; +\infty[$.

1. Montrer que la fonction H est une primitive de h .

On rappelle que k est un réel strictement positif et que f_k est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1+\ln(x))}{x}$$

2. Existe-t-il une valeur de k pour laquelle la valeur moyenne de la fonction f_k sur l'intervalle $[1; e]$ est égale à 0 ?
Justifier.

CORRECTION

Partie A : étude d'un premier cas particulier

1. F_2 est une primitive de f_2 sur $]0; +\infty[$ donc $F_2' = f_2$.

On détermine graphiquement le signe de $f_2(x)$ sur $[0; 3]$.

Si $0 < x < 0,35$ alors $f_2(x) < 0$ $f_2(0,35) = 0$

Si $0,35 < x < 2,5$ alors $f_2(x) < 0$ $f_2(2,5) = 0$

Si $2,5 < x \leq 3,5$ alors $f_2(x) < 0$

On donne les variations de F_2 sous la forme d'un tableau.

x	0	0.35	2.5	$+\infty$		
f_2		-	0	+	0	-
F_2						

2. f_2 est croissante sur $]0; 0,75]$ et décroissante sur $[0,75; 3,5]$.

Donc si $0 < x < 0,75$ alors $f_2'(x) > 0$ et si $0,75 < x < 3,5$ alors $f_2'(x) < 0$.

Et la courbe 1 est la courbe de f_2' .

$A(1,65; 1,7)$ est un point d'inflexion de la courbe de f_2 .

f_2 est concave sur $]0; 1,65]$ et convexe sur $[1,65; 3,5]$.

Donc si $0 < x < 1,65$ alors $f_2''(x) < 0$ et si $1,65 < x \leq 3,5$ alors $f_2''(x) > 0$ et $f_2''(1,65) = 0$.

Et la courbe 2 est la courbe de f_2'' .

Partie 2 : étude d'un second cas particulier

1.a. $x \in]0; +\infty[$ $f_1(x) = 1 - x + \frac{1 + \ln(x)}{x}$

$$\left(\frac{1 + \ln(x)}{x}\right)' = \frac{x \times \frac{1}{x} - (1 + \ln(x))}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}$$

donc $f_1'(x) = 1 - \frac{\ln(x)}{x^2}$.

1.b. $\frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1'(x) = 1$.

2.a. $x \in]0; +\infty[$ $f_1''(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}$

Le signe de $f_1''(x)$ est le signe de la dérivée de $f_1'(x)$.

Le signe de $f_1''(x)$ sur $]0; +\infty[$ est le signe de $(2 \ln(x) - 1)$.

$$2 \ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$2 \ln(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$$

$$2 \ln(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{e}$$

donc f_1' est décroissante sur $]0; \sqrt{e}]$ et croissante sur $[\sqrt{e}; +\infty[$.

$f_1'(\sqrt{e})$ est le minimum de la fonction f_1' sur $]0; +\infty[$.

$$f_1'(\sqrt{e}) = -1 - \frac{\ln(\sqrt{e})}{e} = -1 - \frac{1}{2e}$$

2.b. $x \in]0; +\infty[$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(x)}{x^2} = +\infty$
 et $\lim_{x \rightarrow 0} f'_1(x) = +\infty$.

2.c. f'_1 est continue et strictement décroissante sur $]0; \sqrt{e}]$ à valeurs dans $\left[-1 - \frac{1}{2e}; +\infty\right]$, $0 \in \left[-1 - \frac{1}{2e}; +\infty\right]$
 le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f'_1(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $]0; \sqrt{e}]$.

Si $\sqrt{e} \leq x$ alors $f'_1(x) < -1$ donc l'équation $f'_1(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[\sqrt{e}; +\infty[$.

Conclusion

L'équation $f'_1(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$, cette solution appartient à $]0; \sqrt{e}]$.

f'_1 est positive sur $]0; \alpha[$ et négative sur $]\alpha; +\infty[$.

f'_1 est croissante sur $]0; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$ et $f'_1(\alpha)$ est un maximum pour f'_1 .

2.c.

```
def d(x):
    return -1-log(x)/x**2

def alpha()
    u=0.5
    while d(u) > 0:
        u= u+0.01
    return u
```

Remarque : l'algorithme renvoie 0,65.

Partie C : k quelconque

1. $x \in]0; +\infty[$ $h(x) = \frac{1+\ln(x)}{x}$ $H(x) = \frac{1}{2}(1+\ln(x))^2$

$$H'(x) = 2 \left(\frac{1}{2}(1+\ln(x)) \right) \times \frac{1}{x} = \frac{1+\ln(x)}{x} = h(x)$$

donc H est une primitive de h sur $]0; +\infty[$.

2. $k > 0$ $f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1+\ln(x))}{x} = 1 - x + kh(x)$. Une primitive de f_k sur $]0; +\infty[$ est F_k définie par :

$$F_k(x) = x - \frac{x^2}{2} + kH(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{k}{2}(1+\ln(x))^2.$$

La valeur moyenne de f_k sur $[1; e]$ est : $\mu_k = \frac{1}{e-1} \int_1^e f_k dx = \frac{1}{e-1} [F_k]_1^e$

$$F_k(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{k}{2} = \frac{k+1}{2} \quad F_k(e) = e - \frac{e^2}{2} + \frac{k}{2} \times 2^2 = e - \frac{e^2}{2} + 2k.$$

$$\mu_k = \frac{1}{e-1} \left(e - \frac{e^2}{2} + 2k - \frac{k+1}{2} \right) = \frac{1}{e-1} \left(\frac{2e - e^2 + 4k - k - 1}{2} \right) = \frac{2e - e^2 + 3k - 1}{2(e-1)}$$

$$\mu_k = 0 \Leftrightarrow -e^2 + 2e + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow 3k = e^2 - 2e + 1 \Leftrightarrow k = \frac{(e-1)^2}{3}$$

La valeur moyenne de la fonction f_k est nulle pour $k = \frac{(e-1)^2}{3}$.