

Exercice 1

5 points

Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre.

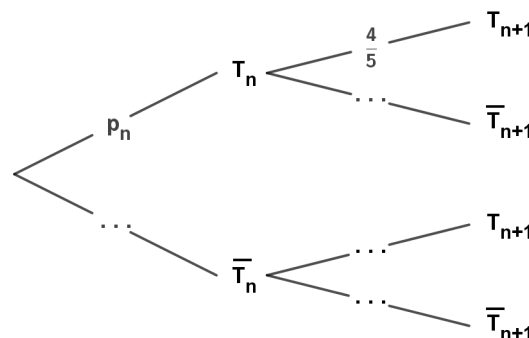
On modélise la situation de la façon suivante :

- ✓ au premier tir, il atteint le centre de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
- ✓ pour les tirs suivants :
 - . lorsqu'il a atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne à nouveau le centre de la cible est $\frac{4}{5}$;
 - . lorsqu'il n'a pas atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne le centre de la cible est $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement T_n : « le tireur atteint le centre de la cible au $n^{\text{ième}}$ tir ».

On note $p_n = P(T_n)$ la probabilité que l'évènement T_n se réalise.

1. Donner la valeur de p_1 et montrer que $p_2 = \frac{17}{30}$.
2. Recopier sur la copie l'arbre de probabilité suivant et compléter les pointillés avec les probabilités qui conviennent :



3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \frac{5}{8}$.
 - 4.a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$.
 - 4.b. Déterminer une expression de u_n en fonction de n .
 - 4.c. En déduire une expression de p_n en fonction de n .
5. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. On considère ci-dessous une fonction seuil, incomplète, écrite en langage Python. Recopier cette fonction sur la copie en complétant les pointillés afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que p_n soit supérieur ou égal à 0,6.

```
def seuil():
    n=1
    p=0.5
    while ....:
        n=.....
        p=.....
    return .....
```

7. Résoudre dans l'inéquation $p_n \geq 0,6$.

CORRECTION

1. En utilisant la formule des probabilités totales

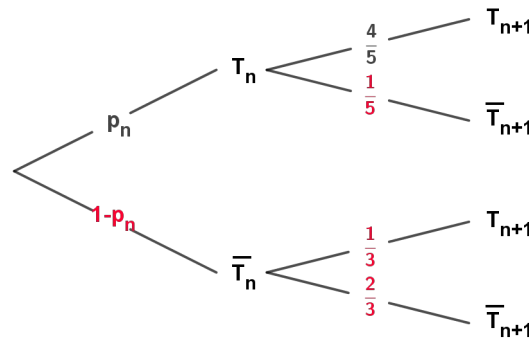
$$p_2 = P(T_2) = P(T_1 \cap T_2) + P(\bar{T}_1 \cap T_2) = P(T_1) \times P_{T_1}(T_2) + P(\bar{T}_1) \times P_{\bar{T}_1}(T_2)$$

$$P(T_1) = p_1 = \frac{1}{2} \quad P(\bar{T}_1) = 1 - P(T_1) = 1 - p_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad P_{T_1}(T_2) = \frac{4}{5} \quad P_{\bar{T}_1}(T_2) = \frac{1}{3}$$

$$p_2 = P(T_2) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{10} + \frac{1}{6} = \frac{12+5}{30} = \frac{17}{30}.$$

$$2. \quad P(\bar{T}_n) = 1 - P(T_n) = 1 - p_n \quad P_{T_n}(\bar{T}_{n+1}) = 1 - P_{T_n}(T_{n+1}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \quad P_{\bar{T}_n}(T_{n+1}) = 1 - P_{\bar{T}_n}(\bar{T}_{n+1}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

On obtient pour arbre de probabilités :



3. En utilisant la formule des probabilités totales

$$p_{n+1} = P(T_{n+1}) = P(T_n \cap T_{n+1}) + P(\bar{T}_n \cap T_{n+1}) = P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) + P(\bar{T}_n) \times P_{\bar{T}_n}(T_{n+1})$$

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{4}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3} = \frac{4}{5} p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} p_n$$

$$p_{n+1} = \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3} \right) p_n + \frac{1}{3} = \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3}.$$

$$4. \text{ Pour tout entier naturel non nul } n : u_n = p_n - \frac{5}{8} \Leftrightarrow p_n = u_n + \frac{5}{8}$$

$$4.a. \quad u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{5}{8} = \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{8} = \frac{7}{15} \left(u_n + \frac{5}{8} \right) + \frac{1}{3} - \frac{5}{8}$$

$$u_{n+1} = \frac{7}{15} u_n + \frac{7 \times 5}{15 \times 8} + \frac{8}{24} - \frac{15}{24} = \frac{7}{15} u_n + \frac{7+8-15}{24} = \frac{7}{15} u_n$$

(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$.

$$4.b. \quad u_1 = p_1 - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}$$

Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1}$$

$$4.c. \quad p_n = u_n + \frac{5}{8} = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} + \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1}$$

$$5. \quad 0 < \frac{7}{15} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1} = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{5}{8}$$

Après un grand nombre de tirs, la probabilité du tireur d'atteindre le centre de la cible pour chaque tir sera très voisine de $\frac{5}{8}$.

6.

```
def seuil( ):
    n=1
    p=0.5
    while p<0.6:
        n= n+1
        p= 7/15 * p + 1/3
    return n
```

7. En utilisant la calculatrice ou un tableur , on obtient l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égal à 4.

Par le calcul :

$$p_n \geq 0,6 \Leftrightarrow \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geq 0,6 \Leftrightarrow \frac{5}{8} - 0,6 \geq \frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \Leftrightarrow 5 - 4,8 \geq \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \Leftrightarrow 0,2 \geq \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}$$

La fonction $\ln$ est croissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln(0,2) \geq \ln\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \ln(0,2) \geq (n-1) \times \ln\left(\frac{7}{15}\right)$$

$$0 < \frac{7}{15} < 1 \text{ donc } \ln\left(\frac{7}{15}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{7}{15}\right)} \leq n-1$$

$$\frac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{7}{15}\right)} \simeq 2,11$$

n est un entier naturel donc on obtient $n \geq 4$