

Exercice 2

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre choix. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Affirmation 1 :

La fonction f admet pour limite 1 en $+\infty$.

2. On considère la suite (w_n) définie par $w_0=1$ et pour tout entier naturel n , $w_{n+1}=w_n+2n+3$.

Affirmation 2 :

Pour tout entier naturel n , $w_n=(n+1)^2$.

3. Soit p un nombre réel tel que $0 < p < 1$.

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 3 et p .

On note $P(X=1)$ la probabilité de l'évènement $(X=1)$.

Affirmation 3 :

$$P(X=1) = 3p - 6p^2 + 3p^3$$

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $v_n = \int_0^1 e^{nx} dx$.

Affirmation 4 :

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{e^n}{n}$.

5. On colore en rouge, jaune ou noir chacune des 16 cases d'un quadrillage.

Affirmation 5 :

On peut réaliser $\binom{16}{3}$ coloriages différents.

CORRECTION

1. Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

$$x > 1 \text{ et } f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \quad x-1 > 0 \text{ donc } x-1 = \sqrt{(x-1)^2}$$

$$\text{et } f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2-1}} = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

$$\text{remarque : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0.$$

2. Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

$$w_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, w_{n+1} = w_n + 2n + 3.$$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$w_n = (n+1)^2$$

Initialisation

$$w_0 = 1 \text{ et } (0+1)^2 = 1 \text{ donc } w_0 = (0+1)^2 \text{ la propriété est vérifiée pour } n=0.$$

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que $w_n = (n+1)^2$ et on doit démontrer que $w_{n+1} = (n+1+1)^2 = (n+2)^2$.

$$\text{Si } w_n = (n+1)^2 \text{ alors } w_{n+1} = w_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , on a : $w_n = (n+1)^2$.

3. Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

X suit la loi binomiale de paramètres 3 et p donc :

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \times p^1 \times (1-p)^{3-1} = 3p(1-p)^2 = 3p(1-2p+p^2) = 3p-6p^2+3p^3$$

4. Affirmation 4 : FAUSSE

Preuve

n est un entier naturel non nul.

f est la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = e^{nx}$ et F est la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \frac{e^{nx}}{n}$

F est une primitive de f sur $[0;1]$.

$$v_n = \int_0^1 e^{nx} dx = \left[\frac{e^{nx}}{n} \right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n} \neq \frac{e^n}{n}$$

5. Affirmation 5 : VRAIE

Preuve

Pour chaque case il y a 3 couleurs possibles donc le nombre de coloriage différents des 16 cases du quadrillage est : $3^{16} = 43046721$.

$$\binom{16}{3} = \frac{16 \times 15 \times 14}{3 \times 2 \times 1} = 40 \times 14 = 560.$$

$560 < 43046721$ On peut donc réaliser 560 coloriage différents des 16 cases du quadrillage.

Par exemple : il existe 560 coloriage différents ayant 3 cases coloriées en rouge et 13 cases coloriées en jaune.