

Exercice 3

5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points suivants :
 $A(0;0;1)$; $B(1;2;3)$; $C(3;3;1)$; $E(2;-2;2)$; $F(3;0;4)$ et $G(5;1;2)$.

- 1.a. Montrer que les points B , C et E ne sont pas alignés.
- 1.b. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est normal au plan (BCE) .
- 1.c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BCE) est : $x + y - 4 = 0$.
- 2.a. Montrer que le point G n'appartient pas au plan (BCE) .
- 2.b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.
- 2.c. En déduire que la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.

Pour la suite de l'exercice, on appellera P le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BCE) .

- 3.a. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (AG) est :
$$\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = t+1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$
- 3.b. En déduire les coordonnées du point P .
- 3.b. Montrer que le point P est le milieu de $[EC]$.
4. Déterminer l'intersection des plans (BCE) et (ACG) .

CORRECTION

1.a. $B(1;2;3)$ $C(3;3;1)$ $E(2;-2;2)$

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-4}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires et les points B, C et E ne sont pas alignés.

1.b. $\overrightarrow{AF}$ est un vecteur normal au plan (BCE) si et seulement si $\overrightarrow{AF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCE) par exemples $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$.

$$A(0;0;1) \quad F(3;0;3) \quad \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times (-2) = 6 - 6 = 0$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = 3 \times 1 + 0 \times (-4) + 3 \times (-1) = 3 - 3 = 0$$

donc $\overrightarrow{AF}$ est un vecteur normal au plan (BCE).

1.c. (BCE) est le plan passant par $A(0;0;1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc :

$$(BCE) : 3x + 0 \times y + 3z + d = 0 \quad \text{et} \quad 3 \times 1 + 0 \times 2 + 3 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

$$(BCE) : 3x + 3z - 12 = 0 \Leftrightarrow (BCE) : x + z - 4 = 0.$$

2.a. $G(5;1;2)$ $5 + 1 - 4 = 2 \neq 0$ donc le point G n'appartient pas au plan (BCE).

2.b. $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 2a + b & (1) \\ 1 = a - 2b & (2) \\ 1 = -2a - b & (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) sont incompatibles : $5 = 2a + b$ et $-1 = 2a + b$ donc :

les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas coplanaires.

2.c. La droite (AG) est parallèle au plan (BCE) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires.

(AG) n'est pas parallèle au plan (BCE) et la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.

3.a. (AG) est la droite passant par $A(0;0;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc une représentation paramétrique de (AG) est : $\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

3.b. Pour déterminer les coordonnées du point P, on résout le système $\begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ x = 5t \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}.$

$$\text{On obtient : } 5t + t + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow 6t = 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} \quad y = \frac{1}{2} \quad z = \frac{3}{2} \quad P\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

3.c. Soit I le milieu de [EC] $E(2;-2;2)$ $C(3;3;1)$

$$x_I = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \quad y_I = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \quad z_I = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{donc } P = I\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

4. Le point G n'appartient pas au plan (BCE) donc les plans (BCE) et (ACG) ne sont pas confondus.

La droite (AG) est contenue dans le plan (ACG), P appartient à (AG) donc P appartient à (ACG).

Les points distincts C et P appartiennent aux deux plans non confondus (BCE) et (ACG) donc les plans (BCE) et (ACG) sont sécants et leur droite d'intersection est (CP).