

Exercice 4

5 points

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ par :

$$g(x) = x \cos(x) - \sin(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ et on note g' sa dérivée.

- 1.a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 2\pi]$, on a :

$$g'(x) = -x \sin(x).$$

- 1.b. On donne le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ ci-dessous.

Justifier chacun des éléments qui figurent dans ce tableau de variations.

x	0	π	2π
g	0	$-\pi$	2π

- 1.c. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle α dans l'intervalle $[\pi; 2\pi]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

- 1.d. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ et on note f' sa dérivée.

- 2.a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 2\pi]$ on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

- 2.b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

- 2.c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

- 2.d. Déterminer la limite de f en 0. On pourra utiliser le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient l'inégalité $0 < r < s < \pi$.

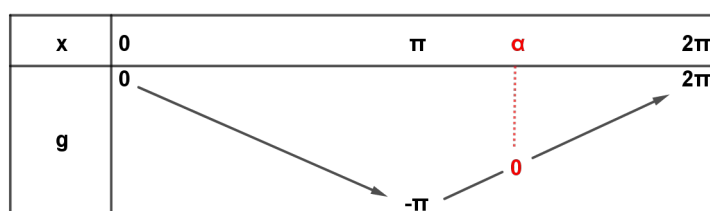
Montrer que :
$$\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}$$

CORRECTION

1.a. $x \in [0; 2\pi]$ $g(x) = x \cos(x) - \sin(x)$
 $\cos'(x) = -\sin(x)$ $\sin'(x) = \cos(x)$
 donc $g'(x) = 1 \times \cos(x) + x \times (-\sin(x)) - \cos(x) = -x \sin(x)$.

1.b. $g(0) = 0 \times \cos(0) - \sin(0) = 0$
 $g(\pi) = \pi \times \cos(\pi) - \sin(\pi) = -\pi$
 $g(2\pi) = 2\pi \times \cos(2\pi) - \sin(2\pi) = 2\pi$
 Si $0 < x < \pi$ alors $\sin(x) > 0$ et $-x \sin(x) < 0$ donc $g'(x) < 0$
 et g est strictement décroissante sur $]0; \pi[$.
 Si $\pi < x < 2\pi$ alors $\sin(x) < 0$ et $-x \sin(x) > 0$ donc $g'(x) > 0$
 et g est strictement croissante sur $]\pi; 2\pi]$.

1.c. g est continue et strictement croissante sur $[\pi; 2\pi]$ à valeurs dans $[-\pi; 2\pi]$.
 Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe α unique tel que $g(\alpha) = 0$ car $0 \in [-\pi; 2\pi]$.
 En utilisant la calculatrice on obtient $\alpha \simeq 4,29$.



1.d. Si $0 < x \leq \pi$ alors $g(0) > g(x) \geq g(\pi)$ soit $0 > g(x) \geq -\pi$.
 Car g est strictement décroissante sur $[0; \pi]$.
 Si $\pi \leq x < \alpha$ alors $g(\pi) \leq g(x) < g(\alpha)$ soit $-\pi \leq g(x) < 0$.
 Car g est strictement croissante sur $[\pi; \alpha]$.
 Si $\alpha < x \leq 2\pi$ alors $g(\alpha) < g(x) \leq g(2\pi)$ soit $0 < g(x) \leq 2\pi$.
 Car g est strictement croissante sur $[\alpha; 2\pi]$;
 On donne le signe de $g(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	0	π	α	2π
g(x)		-	0	+

2.a. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
 $u(x) = \sin(x)$ $u'(x) = \cos(x)$
 $v(x) = x$ $v'(x) = 1$
 $f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

2.b. Le signe de $f'(x)$ sur $]0; 2\pi]$ et le signe de $g(x)$ sur $]0; 2\pi]$.

x	0	π	α	2π
f'(x)		-	0	+

2.c. On donne le tableau de variations de f en utilisant la question suivante.

x	0	π	α	2π
f'(x)		-	0	+
f(x)	1	0	cos(α)	0

$$g(\alpha) = 0 = \alpha \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \quad \text{donc} \quad \cos(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = f(\alpha)$$

$$f(2\pi) = \frac{\sin(2\pi)}{2\pi} = 0$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

2.d. Si $0 < x \leq 2\pi$ $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$

On obtient le taux d'accroissement de la fonction sinus entre 0 et x.

La fonction sinus est dérivable en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

3. f est strictement décroissante sur $]0; \pi]$ donc :

$$0 < r < s < \pi \quad \text{alors} \quad f(r) > f(s) > f(\pi) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sin(r)}{r} > \frac{\sin(s)}{s}$$

$$\text{On a : } \frac{r}{\sin(s)} > 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\sin(r)}{r} \times \frac{r}{\sin(s)} > \frac{\sin(s)}{s} \times \frac{r}{\sin(s)}$$

$$\text{et} \quad \frac{\sin(r)}{\sin(s)} > \frac{r}{s}$$