

Exercice 1

5 points

Partie 1

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$.

1. Justifier tous les éléments du tableau de ci-dessous

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$
f	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

2. En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$, on a : $f(x) \in [0; 1]$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n - 3} \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

1. En utilisant la fonction f démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On note L la limite de la suite (u_n) .

En admettant que L est solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; 1]$, montrer que $L = 1$.

4. On donne ci-dessous une fonction seuil écrite en langage Python.

```
def seuil(h):
    n=0
    u=0
    while u<1-h:
        n=n+1
        u=(u-2)/(2*u-3)
    return n
```

L'appel `seuil(0,0001)` renvoie la valeur 5000.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

5.a. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n) sous forme de fraction irréductibles.

5.b. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture.

CORRECTION

Partie A

$$1. f(x) = \frac{x-2}{2x-3} \quad f \text{ est dérivable sur }]-\infty; \frac{3}{2}[$$

$$u(x) = x-2 \quad u'(x) = 1 \quad v(x) = 2x-3 \quad v'(x) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1 \times (2x-3) - 2 \times (x-2)}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3-2x+4}{(2x-3)^2} = \frac{1}{(2x-3)^2} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Le signe de $\frac{x-2}{2x-3}$ sur son ensemble de définition est le signe de $(x-2)(2x-3)$.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$\frac{x-2}{2x-3}$	+		- 0 +	+

Donc f est strictement positive sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} x-2 = -\frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} 2x-3 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = +\infty$$

2. f est croissante sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$ donc si $0 \leq x \leq 1$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$.

$$f(0) = \frac{2}{3} \quad f(1) = 1 \quad \text{donc } 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \text{soit } f(x) \in [0; 1]$$

Partie B

1. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Initialisation

$$u_0 = 0 \quad u_1 = \frac{2}{3} \quad \text{donc } 0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1 \quad \text{et la propriété est vérifiée pour } n=0.$$

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n on suppose que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ et on doit démontrer que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

Si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ alors $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$ car f est croissante sur $[0; 1]$.

$$\text{Or } f(0) = \frac{2}{3} \geq 0 \quad f(u_n) = u_{n+1} \quad f(u_{n+1}) = u_{n+2} \quad f(1) = 1 \quad \text{donc } 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1.$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

2. Pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n , $u_n \leq 1$ donc la suite (u_n) est majorée par 1.

Toute suite croissante et majorée est convergente donc la suite (u_n) est convergente et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

$$3. f(x) = x \Leftrightarrow \left(0 \leq x \leq 1 \text{ et } \frac{x-2}{2x-3} = x \right)$$

$$\frac{x-2}{2x-3}=x \Leftrightarrow x-2=x(2x-3) \Leftrightarrow x-2=2x^2-3x \Leftrightarrow 2x^2-4x+2=2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$1 \in [0;1] \text{ donc } L=1.$$

4. u_{5000} est le premier terme de la suite (u_n) supérieur ou égal à 0,9999.

5.a. $u_0=0 \quad u_1=\frac{2}{3}$

$$u_2 = \frac{u_1-2}{2u_1-3} \quad u_1 = \frac{2}{3} - 2 = \frac{2-6}{3} = \frac{-4}{3} \quad 2u_1-3 = \frac{4}{3} - 3 = \frac{4-9}{3} = \frac{-5}{3} \quad u_2 = \frac{(-4)}{3} \times \frac{3}{(-5)} = \frac{4}{5}$$

$$u_3 = \frac{u_2-2}{2u_2-3} \quad u_2 = \frac{4}{5} - 2 = \frac{4-10}{5} = \frac{-6}{5} \quad 2u_2-3 = \frac{8}{5} - 3 = \frac{8-15}{5} = \frac{-7}{5} \quad u_3 = \frac{-6}{5} \times \frac{5}{-7} = \frac{6}{7}$$

5.b. Conjecture : pour tout entier naturel n , on a $u_n = \frac{2n}{2n+1}$.

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{2n}{2n+1}$$

Initialisation

$$u_0=0 \text{ et } \frac{2 \times 0}{2 \times 0 + 1} = 0 \text{ dans la propriété est vérifiée pour } n=0.$$

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que $u_n = \frac{2n}{2n+1}$

$$\text{et on doit démontrer que } u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} = \frac{2n+2}{2n+3}.$$

$$\text{Si } u_n = \frac{2n}{2n+1} \text{ alors } u_{n+1} = \frac{u_n-2}{2u_n-3}$$

$$u_n-2 = \frac{2n}{2n+1} - 2 = \frac{2n-2(2n+1)}{2n+1} = \frac{-2n-2}{2n+1}$$

$$2u_n-3 = \frac{4n}{2n+1} - 3 = \frac{2n-6n-3}{2n+1} = \frac{-2n-3}{2n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{(-2n-2)}{2n+1} \times \frac{2n+1}{(-2n-3)} = \frac{-2n-2}{-2n-3} = \frac{2n+2}{2n+3} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , on a $u_n = \frac{2n}{2n+1}$

Remarque

En utilisant la calculatrice :

$$u_{5000} = \frac{10000}{10001} \simeq 0,99990001 \quad u_{4999} = \frac{9998}{9999} \simeq 0,99989999.$$