

Exercice 3

5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points :
 $A(1; 2; 3)$ $B(-1; 3; 1)$ $C(2; 1; 6)$ $D(3; -2; -1)$

- 1.a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
- 1.b. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
- 1.c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
- 2.a. Déterminer une équation paramétrique de la droite (d) perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point D.
- 2.b. Déterminer les coordonnées du point H qui est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
- 2.c. En déduire que la distance du point D au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{2}$.
- 3.a. Montrer que : $\cos(\widehat{ABC}) = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$
- 3.b. En déduire la valeur exacte de $\sin(\widehat{ABC})$.
- 3.c. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
4. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.
On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :
 $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur qui lui est associée.

CORRECTION

1.a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \frac{-2}{1} \neq \frac{1}{-1}$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Donc les points A, B et C ne sont pas alignés et les points A, B et C définissent un plan.

- 1.b. Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (ABC) par exemples $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times (-2) + 4 \times 1 + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 1 + 4 \times (-1) + 1 \times 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

donc le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

- 1.c. (ABC) est le plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par le point A(1;2;3).

$$(ABC): 1 \times x + 4 \times y + 1 \times z + k = 0 \Leftrightarrow (ABC): x + 4y + z + k = 0$$

$$\text{et } 1 \times 1 + 4 \times 2 + 1 \times 3 + k = 0 \Leftrightarrow k = -12$$

$$(ABC): x + 4y + z - 12 = 0$$

- 2.a. (d) est la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par le point D(3;-2;-1) donc une représentation

$$\text{paramétrique de (d) est : } \begin{cases} x = t+3 \\ y = 4t-2 \\ z = t-1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- 2.b. Le projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC) est le point d'intersection de (d) et (ABC).

$$\text{On résout le système : } \begin{cases} x + 4y + z - 12 = 0 \\ x = t+3 \\ y = 4t-2 \\ z = t-1 \end{cases}$$

On obtient :

$$t+3+4 \times (4t-2) + t-1-12=0 \Leftrightarrow t+3+16t-8+t-1-12=0 \Leftrightarrow 18t-18=0 \Leftrightarrow t=1.$$

$$x_H = 1+3=4 \quad y_H = 4-2=2 \quad z_H = 1-1=0 \quad H(4;2;0)$$

- 2.c. DH est la distance du point D au plan (ABC).

$$D(3;-2;-1) \quad DH^2 = (4-3)^2 + (2+2)^2 + (0+1)^2 = 1+16+1=18$$

$$DH = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

- 3.a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-2) \times 3 = -2 - 1 - 6 = -9$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$AB^2 = (-2)^2 + 1^2 + (-2)^2 = 4 + 1 + 4 = 9 \quad AB = \sqrt{9} = 3$$

$$AC^2 = 1^2 + (-1)^2 + 3^2 = 1 + 1 + 9 = 11 \quad AC = \sqrt{11}$$

$$\text{On obtient : } -9 = 3\sqrt{11} \cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-9}{3\sqrt{11}} = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

- 3.b. $\cos(\widehat{BAC})$ est négatif donc l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus donc $\sin(\widehat{BAC})$ est positif.

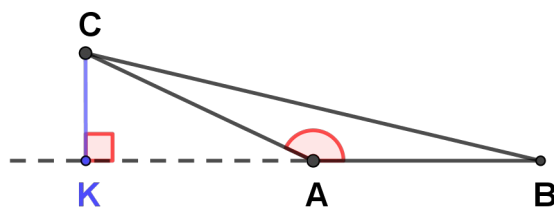
$$\cos^2(\widehat{BAC}) + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1 \Leftrightarrow \frac{9 \times 11}{11^2} + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1 \Leftrightarrow \sin^2(\widehat{BAC}) = 1 - \frac{9}{11} = \frac{2}{11}$$

$$\sin(\widehat{BAC}) = \sqrt{\frac{2}{11}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{22}}{11}$$

- 3.c. Pour calculer l'aire du triangle ABC en ne connaissant la formule :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC})$$

On doit alors calculer la hauteur CK du triangle ABC.



Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAK}$ sont supplémentaires donc $\sin(\widehat{CAK}) = \sin(\widehat{BAC}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$

Dans le triangle rectangle ACK $\sin(\widehat{CAK}) = \frac{CK}{CA}$ donc $CK = CA \times \sin(\widehat{CAK}) = \sqrt{11} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \sqrt{2}$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AK = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

4. DH est la hauteur associée à la base ABC

$$DH = 3\sqrt{2} \text{ donc } \mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 3$$