

Exercice 4

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre choix.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.
Les quatre questions sont indépendantes.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^5$.

Affirmation 1 :

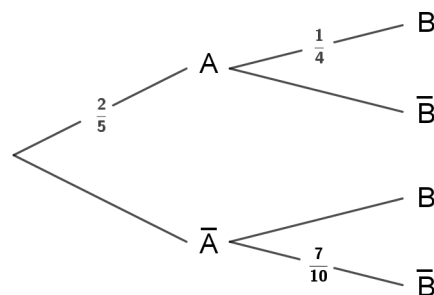
La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Une urne contient 32 jetons numérotés de 1 à 32 indiscernables au toucher.
On tire simultanément 5 jetons de cette urne.
On appelle tirage la liste non ordonnée des numéros des cinq jetons tirés.

Affirmation 2 :

Le nombre de tirages possibles contenant au moins un multiple de 8 est égal à 103096.

3. On considère l'arbre de probabilités ci-dessous.



Affirmation 3 :

$$P_B(\bar{A}) = \frac{9}{50}$$

4. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x} \cos(x)$
où y est une fonction de la variable x , dérivable sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 4 :

La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-x} \sin(x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5 :

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = C e^{-x} \sin(x) \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$

CORRECTION

1. Affirmation 1 : FAUSSE

Preuve

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x+3\right)^5 \quad f'(x) = -\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^4 \quad f''(x) = \frac{20}{4}\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^3.$$

Le signe de $f''(x)$ est le signe de $\left(-\frac{1}{2}x+3\right)$ car 3 est un nombre impair.

$$-\frac{1}{2}x+3=0 \Leftrightarrow x=6$$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−

Donc f est concave sur $[0; +\infty[$.

2. Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

Il y a 4 multiples de 8 parmi les 32 nombres compris entre 1 et 32 : 8;16 ; 24 et 32.

Le nombre total de tirages possibles est égal à :

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 4 \times 31 \times 2 \times 29 \times 28 = 201376.$$

Il y a 28 nombres distincts qui ne sont pas des multiples de 8 parmi les nombres compris entre 1 et 32.

Le nombre de tirages possibles ne contenant aucun multiple de 8 est égal à :

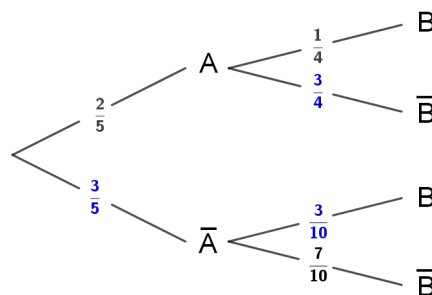
$$\binom{28}{5} = \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 28 \times 27 \times 26 \times 5 \times 1 = 98280.$$

Le nombre de tirages possibles contenant au moins un multiple de 8 est égal à :
 $201376 - 98280 = 103096$

3. Affirmation 3 : FAUSSE

Preuve

On complète l'arbre de probabilités :



En utilisant la formule de probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{2}{20} + \frac{9}{50} = \frac{1}{10} + \frac{9}{50} = \frac{5+9}{50} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{50}$$

$$P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{9}{50} \times \frac{25}{14} = \frac{9}{14} \neq \frac{9}{50}$$

4. Affirmation 4 : VRAIEPreuve

Pour tout nombre réel x :

$$(e^{-x})' = -e^{-x} \quad \sin'(x) = \cos(x)$$

$$h(x) = e^{-x} \sin(x) \quad h'(x) = -e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x)$$

$$h(x) + h'(x) = -e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x) + e^{-x} \sin(x) = e^{-x} \cos(x)$$

donc h est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5 : FaussePreuve

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ sont les fonctions g_K ($K \in \mathbb{R}$) définies sur $\mathbb{R}$ par $g_K(x) = K e^{-x}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f_K définies sur $\mathbb{R}$ par $f_K(x) = K e^{-x} + e^{-x} \sin(x)$ avec $K \in \mathbb{R}$.

On remarque $f_K(\pi) = K e^{-\pi}$ si $K \neq 0$ alors $f_K(\pi) \neq 0$.

Pour toute valeur de C on a : $k(\pi) = 0$.