

Exercice 1

5 points

La fédération internationale d'escrime établit des normes sur les lames des armes des tireurs afin de garantir au maximum leur sécurité.

Pour tester la conformité de l'acier employé, la lame est pliée puis redressée toutes les secondes jusqu'à la rupture. La lame est conforme si la rupture intervient après plus de cinq heures de test.

Un équipementier d'escrime se fournit auprès de trois fabricants de lames. Son stock est composé de 60 % de lames du fournisseur A, de 12 % de lames du fournisseur B, le reste venant du fournisseur C.

Une étude qualité a montré que :

- . 90 % des lames du fournisseur A étaient conformes ;
- . 95 % des lames du fournisseur B étaient conformes ;
- . 85 % des lames du fournisseur C étaient conformes.

Partie A

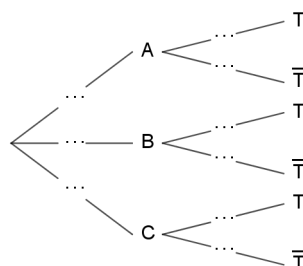
Un contrôle est déclenché sur les lames vendues par l'équipementier.

On considère les événements suivants :

- . A : « La lame testée provient du fournisseur A » ;
- . B : « La lame testée provient du fournisseur B » ;
- . C : « La lame testée provient du fournisseur C » ;
- . T : « La lame testée est conforme ».

On note $\bar{T}$ l'évènement contraire de T.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous représentant la situation.



2. Déterminer $P(A \cap \bar{T})$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Démontrer que la probabilité que la testée soit conforme est de 0,892.

4. Sachant que la lame testée n'est pas conforme, déterminer la probabilité qu'elle provienne du fournisseur B. On donnera la valeur au millième.

Partie B

D'après la **partie A**, la probabilité qu'une lame de l'équipementier ne soit pas conforme est égale à 0,108. Lors d'une compétition d'escrime, l'équipementier apporte un échantillon de 75 lames provenant de son stock. On considère qu'il les a choisies au hasard et de manière indépendante. De plus son stock de lames est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à une tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de lames non conformes dans cet échantillon.

1. On admet que la variable X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité que 6 lames exactement soient non conformes dans cet échantillon.
On arrondira le résultat au millième.
3. L'équipementier affirme que la probabilité qu'il ait strictement plus de 8 lames non conformes dans cet échantillon est inférieure à 50 %. A-t-il raison ?

Partie C

Soit n un entier strictement positif désignant le nombre de compétitions durant lesquelles l'équipementier est présent.

Il apporte chaque fois un échantillon de 75 lames. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, que l'on considère indépendantes, donnent pour chaque échantillon le nombre de lames non conformes.

On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

1. Déterminer l'espérance $E(M_n)$ et la variance $V(M_n)$ de la variable aléatoire M_n .
2. Justifier l'inégalité suivante, pour tout entier naturel n non nul : $P(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq \frac{1,8063}{n}$.
3. Déterminer une valeur de l'entier n à partir de laquelle $P(|M_n - 0,81| < 2) \geq 0,95$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

Partie A

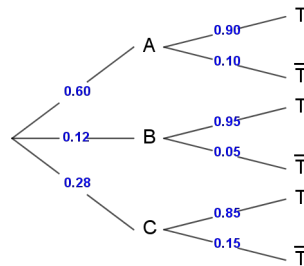
$$1. P(A)=0,60 \quad P(B)=0,12 \quad P(C)=1-0,60-0,12=0,28$$

$$P_A(T)=0,90 \quad P_A(\bar{T})=1-0,90=0,10$$

$$P_B(T)=0,95 \quad P_B(\bar{T})=1-0,95=0,05$$

$$P_C(T)=0,85 \quad P_C(\bar{T})=1-0,85=0,15$$

On obtient pour arbre de probabilités :



$$2. P(A \cap \bar{T}) = P(A) \times P_A(\bar{T}) = 0,60 \times 0,10 = 0,06$$

3. En utilisant la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T)$$

$$P(T) = 0,6 \times 0,9 + 0,12 \times 0,95 + 0,28 \times 0,85 = 0,54 + 0,114 + 0,238 = 0,892$$

$$4. P_{\bar{T}}(B) = \frac{P(B \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0,12 \times 0,05}{0,108} = \frac{0,006}{0,108} = \frac{6}{108}$$

$$P_{\bar{T}}(B) = \frac{1}{18} = 0,056 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Partie B

1. X suit la loi binomiale de paramètres : $n=75$ et $p=0,108$.

$$2. P(X=6) = \binom{75}{6} \times 0,108^6 \times 0,892^{69} = 0,120 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

3. En utilisant la calculatrice :

$$P(X>8) = P(X \geq 9) = 0,422 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$0,422 < 0,50$ donc l'équipementier a raison.

Partie C

1. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ ont la même loi de probabilité : celle de X.

$$E(X) = 75 \times 0,108 = 8,1 \quad V(X) = 75 \times 0,108 \times 0,892 = 7,2252$$

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$E(M_n) = \frac{1}{n} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \times n E(X) = E(X) \quad E(M_n) = 8,1$$

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes donc :

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times n V(X) = \frac{V(X)}{n} \quad V(M_n) = \frac{7,2252}{n}$$

2. On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si t est un réel strictement positif :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq t) \leq \frac{V(M_n)}{t^2}$$

$$E(M_n) = 8,1 \quad t = 2 \quad V(M_n) = \frac{7,2252}{n}$$

$$\text{On obtient : } P(|M_n - E(M_n)| \geq 2) \leq \frac{7,2252}{n \times 4} = \frac{1,8063}{n}$$

3. $P(|M_n - 8,1| < 2) = 1 - P(|M_n - 8,1| \geq 2)$

$$P(|M_n - 8,1| < 2) \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(|M_n - 8,1| \geq 2) \geq 0,95 \Leftrightarrow 0,05 \geq P(|M_n - 8,1| \geq 2).$$

$$\text{Il suffit de choisir } n \text{ tel que : } 0,05 \geq \frac{1,8063}{n} \Leftrightarrow n \geq \frac{1,8063}{0,05} = \frac{180,63}{5} = 36,126.$$

n est un entier naturel donc : $n \geq 37$.

Si le nombre de compétitions est supérieur ou égal à 37 alors la probabilité que la probabilité que $6,1 \leq M_n \leq 10,1$ est supérieur e ou égale à 0,95.