

Exercice 2

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, définie sur indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'équation différentielle suivante où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
(E): $y' + y = 2 \cos(x)$

Affirmation 1 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4e^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$ est solution de l'équation différentielle (E)

2. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ et $g(x) = \sin(x)$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère et $\mathcal{C}_g$ celle de la fonction g .

Affirmation 2 :

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un seul point d'intersection.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{2n + \sin(n)}{n+1}$.

Affirmation 3 :

La suite (v_n) diverge.

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :
 $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

Affirmation 4 :

Pour entier naturel supérieur ou égal à 1 on a $u_n = n^2$.

5. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = e^{-n}$.
On pose, pour tout entier naturel n , $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Affirmation 5 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e}{e-1}$$

CORRECTION

1. Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(e^{-x})' = -e^{-x} \quad (\cos(x))' = -\sin(x) \quad (\sin(x))' = \cos(x) \quad f'(x) = -4e^{-x} - \sin(x) + \cos(x)$$

Pour tout réel x :

$$f'(x) + f(x) = -4e^{-x} - \sin(x) + \cos(x) + 4e^{-4x} + \cos(x) + \sin(x) = 2\cos(x)$$

donc f est solution de l'équation différentielle (E).

2. Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$
 $\Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$.

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x) = 2x - \sin(x)$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 2 - \cos(x)$.

Or $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $h'(x) \geq 1 > 0$ et h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x , on a : $2x - 1 \leq h(x) \leq 2x + 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent par h (0 est cet unique antécédent). Donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point d'intersection (l'origine du repère).

3. Affirmation 3 : FAUSSE

Preuve

Pour tout entier naturel n : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donc $2n - 1 \leq 2n + \sin(n) \leq 2n + 1$

$$\text{et} \quad \frac{2n-1}{n+1} \leq \frac{2n+\sin(n)}{n+1} \leq \frac{2n+1}{n+1} \quad \text{d'autre part} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$.

4. Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = n^2$.

Initialisation

$u_1 = 1$ et $1^2 = 1$ donc la propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que $u_n = n^2$ et on doit démontrer que $u_{n+1} = (n+1)^2$.

Si $u_n = n^2$ alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour entier naturel n on a : $u_n = n^2$

5. Affirmation 5 : VRAIE

Preuve

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} e^{-(n+1)} = e^{-n} \times e^{-1} = e^{-1} \times u_n$

donc la suite (u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme : $u_0 = 1$ et de raison $q = e^{-1}$.

$$S_n = \frac{u_{n+1} - u_0}{e^{-1} - 1} = \frac{e^{-(n+1)} - 1}{e^{-1} - 1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(n+1)} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{-1}{e^{-1} - 1} = \frac{-e}{1 - e} = \frac{e}{e - 1}$$