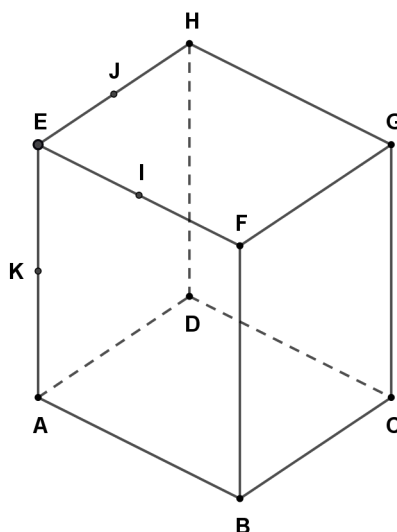


Exercice 3

4 points

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

Soit I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu de $[EH]$ et K le milieu de $[AE]$.

1. Donner les coordonnées des points I , J et K .

2.a. Déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.

2.b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$ arrondie au dixième de degré.

3.a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{KC}$ est un vecteur normal au plan (AIJ) .

3.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (AIJ) est $x + y - \frac{1}{2}z = 0$.

4. Soit L le projeté orthogonal du point C sur le plan (AIJ) .

4.a. Calculer les coordonnées du point L .

4.b. En déduire que la distance du point C au plan (AIJ) est égale à $\frac{4}{3}$.

5. Soit M un point de la droite (FG) .

On admet que les coordonnées de M sont $(1; m; 1)$ avec m appartenant à $\mathbb{R}$.

5.a. Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IM) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \text{ avec } s \in \mathbb{R}$$

5.b. Peut-on affirmer que les droites (IM) et (KC) sont coplanaires quelle que soit la valeur de m ?

CORRECTION

1. On donne les coordonnées des points de la figure

$$A(0;0;0) \quad B(1;0;0) \quad C(1;1;0) \quad D(0;1;0) \quad E(0;0;1) \quad F(1;0;1) \quad G(1;1;1) \quad H(0;1;1)$$

$$I\left(\frac{1}{2};0;1\right) \quad J\left(0;\frac{1}{2};1\right) \quad K\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$$

2.a. $\vec{AI} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \frac{1}{2} \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 = 1$$

2.b. $AI^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2 = \frac{5}{4} \quad AI = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$AJ^2 = 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4} \quad AJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = 1 = AI \times AJ \times \cos(\widehat{IAJ}) = \frac{5}{4} \times \cos(\widehat{IAJ})$$

donc $\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{4}{5}$ et $\widehat{IAJ} = 36,9^\circ$ à 10^{-1} près.

3.a. Pour démontrer que $\vec{KC}$ est un vecteur normal au plan (AIJ) il suffit de démontrer que $\vec{KC}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AIJ) par exemples les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{AJ}$.

$$\vec{KC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{AI} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{KC} \cdot \vec{AI} = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 - \frac{1}{2} \times 1 = 0$$

$$\vec{KC} \cdot \vec{AJ} = 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 1 = 0$$

donc $\vec{KC}$ est un vecteur normal au plan (AIJ).

3.b. (AIJ) est le plan passant par A(0;0;0) et de vecteur directeur $\vec{KC}$.

$$(AIJ): 1 \times x + 1 \times y - \frac{1}{2} \times z + d = 0$$

$$1 \times 0 + 1 \times 0 - \frac{1}{2} \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

$$(AIJ): x + y - \frac{1}{2}z = 0$$

4.a. Le projeté orthogonal L de C sur le plan (AIJ) est le point d'intersection du plan (AIJ) et de la droite (d) passant par C et de vecteur directeur $\vec{KC}$.

Une représentation paramétrique de (d) est :
$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour déterminer les coordonnées de L on résout le système
$$\begin{cases} x + y - \frac{1}{2}z = 0 \\ x = t+1 \\ y = t+1 \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases}$$

$$\text{On obtient } t-1+t+1-\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}t\right) = 0 \Leftrightarrow t+t+\frac{1}{4}t+2=0 \Leftrightarrow \frac{9}{4}t = -2 \Leftrightarrow t = -\frac{8}{9}$$

$$x_L = -\frac{8}{9} + 1 = \frac{1}{9} \quad y_L = -\frac{8}{9} + 1 = \frac{1}{9} \quad z_L = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{8}{9}\right) = \frac{4}{9} \quad L\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \frac{4}{9}\right).$$

4.b. La distance du point C au plan (AIJ) est : CL.

$$CL^2 = \left(\frac{1}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{9} - 0\right)^2 = \frac{64}{81} + \frac{64}{81} + \frac{16}{81} = \frac{144}{81} = \frac{12^2}{9^2} \quad CL = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

5.a. $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \quad M(1; m; 1) \quad \overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ m \\ 0 \end{pmatrix}$

(IM) est la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{IM}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}$$

5.b. $K\left(0; 0; \frac{1}{2}\right) \quad C(1; 1, 0) \quad \overrightarrow{KC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (KC): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$

Pour toute valeur de m les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{KC}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (IM) et (KC) ne sont pas parallèles.

Les droites (IM) et (KC) sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes.

On considère le système $\begin{cases} \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} = t \\ ms = t \\ 1 = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \end{cases}$ on remarque que pour $m=0$ le système n'admet pas

$$\begin{cases} \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} = t \\ 0 = t \\ -1 = t \end{cases} \quad \text{donc (IM) et (KC) ne sont pas coplanaires pour } m=0.$$