

Exercice 4

6 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

1.a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0; +\infty[$.

1.b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Pour tout réel strictement positif x , démontrer que $f'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f en précisant les valeurs limites et les valeurs exactes des éventuels extremums de la fonction.

4. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

5. Vérifier que pour tout réel strictement positif x , on a $f''(x) = \frac{-5+6\ln(x)}{x^4}$.

6.a. Étudier la convexité de la fonction f en précisant les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

6.b. En déduire que, pour tout réel x , appartenant à $]0; e^{\frac{5}{6}}]$, on a $x-1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$.

7. Justifier que, pour tout réel x , appartenant à $[e^{\frac{5}{6}}; +\infty[$, on a aussi $x-1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$.

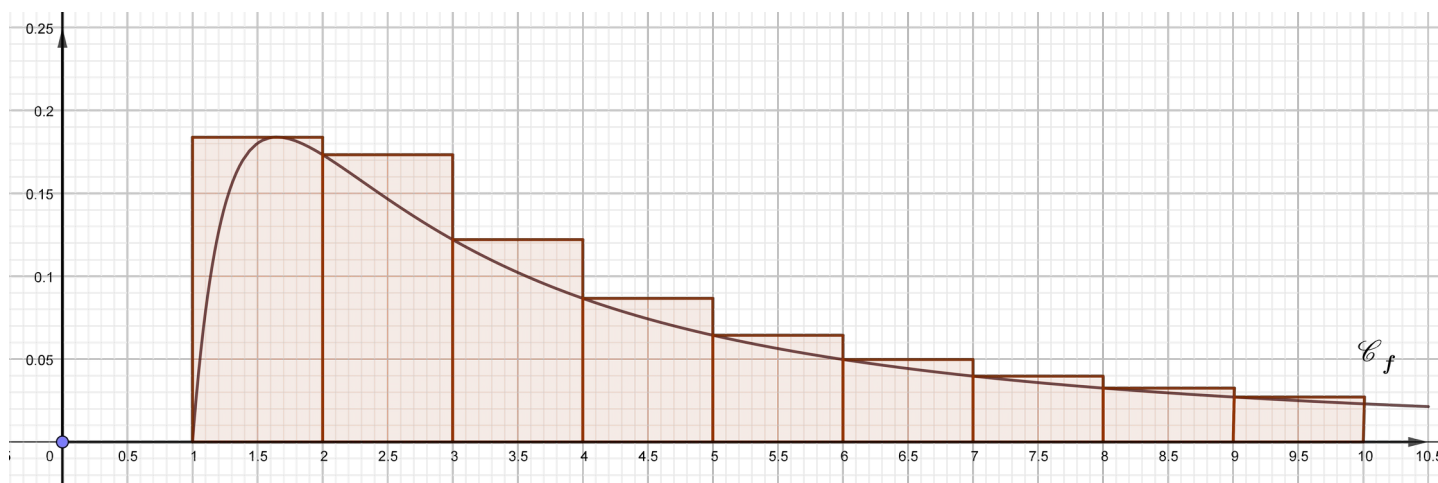
Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n , par : $I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

1. Donner une interprétation graphique de I_n pour tout entier naturel non nul n .

2. Démontrer que la suite (I_n) est croissante.

3. On souhaite calculer une approximation de $\int_1^{10} f(x) dx$ en déterminant la somme des rectangles tracés dans le graphique ci-dessous.



Pour cela, on utilise le script suivant, écrit en langage python.

```
from math import*

S=1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
    S= . . .
print (S)
```

Recopier et compléter ce script afin qu'il réponde au problème posé.

4. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$$I_n = \frac{n-1-\ln(n)}{n}$$

5. Calculer la limite de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.

CORRECTION

Partie A

1.a. $x \in]0; +\infty[\quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$

. $f(x) = \ln(x) \times \frac{1}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

1.b. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$u(x) = \ln(x) \quad u'(x) = \frac{1}{x} \quad v(x) = x^2 \quad v'(x) = 2x$

$u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) = \frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x = x - 2x \ln(x) = x(1 - 2 \ln(x))$

$f'(x) = \frac{x(1 - 2 \ln(x))}{(x^2)^2} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$

3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Si $0 < x < \sqrt{e}$ alors $\ln(x) < \ln(\sqrt{e}) \Leftrightarrow 2 \ln(x) < 2 \times \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow -2 \ln(x) > -1 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln(x) > 0$.

De même si $\sqrt{e} < x$ alors $1 - 2 \ln(x) < 0$

$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$

Tableau de variation de f

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$	
f'(x)		+	0	—
f(x)			$\frac{1}{2e}$	
	$-\infty$			0

4. $f(1) = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0 \quad A(1;0) \quad f'(1) = \frac{1 - 2 \ln(1)}{1^3} = 1$

$\Delta: y - 0 = 1 \times (x - 1)$ donc $\Delta: y = x - 1$

5. $x \in]0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$

$u_1(x) = 1 - 2 \ln(x) \quad u_1'(x) = -\frac{2}{x} \quad v_1(x) = x^3 \quad v_1'(x) = 3x^2$

$u_1'(x) \times v_1(x) - u_1(x) \times v_1'(x) = -\frac{2}{x} \times x^3 - (1 - 2 \ln(x)) \times 3x^2 = -2x^2 - 3x^2 + 6x^2 \ln(x) = x^2(-5 + 6 \ln(x))$

$f''(x) = \frac{x^2(-5 + 6 \ln(x))}{(x^3)^2} = \frac{-5 + 6 \ln(x)}{x^4}$

6.a. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -5 + 6 \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = e^{\frac{5}{6}}$

Si $0 < x < e^{\frac{5}{6}}$ alors $\ln(x) < \frac{5}{6} \Leftrightarrow 6\ln(x) < 5 \Leftrightarrow -5 + \ln(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$

De même, si $e^{\frac{5}{6}} < x$ alors $f''(x) > 0$.

x	0	$e^{\frac{5}{6}}$	$+\infty$
$f''(x)$	—	0	+
f	concave		convexe

Le point B d'abscisse $e^{\frac{5}{6}}$ de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

6.b. $\mathcal{C}_f$ est concave sur $\left]0; e^{\frac{5}{6}}\right]$ donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes et en particulier $\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ sur $\left]0; e^{\frac{5}{6}}\right]$ donc $x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$.

7. En utilisant la calculatrice : $\sqrt{e} \simeq 1,649$ et $e^{\frac{5}{6}} \simeq 2,301$ donc $\sqrt{e} < e^{\frac{5}{6}}$.

f est décroissante sur $[\sqrt{e}; +\infty[$ donc f est décroissante sur $\left[e^{\frac{5}{6}}; +\infty\right[$.

Si $x \geq e^{\frac{5}{6}}$ alors $f(x) \leq f\left(e^{\frac{5}{6}}\right) \simeq 0,157$

Si $x \geq e^{\frac{5}{6}}$ alors $x - 1 \geq e^{\frac{5}{6}} - 1 \simeq 1,301 \geq f\left(e^{\frac{5}{6}}\right) \geq f(x)$

Si $x \geq e^{\frac{5}{6}}$ alors $x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$.

Partie B

1. n est un entier naturel non nul, $f(x) \geq 0$ sur $[1; n]$ donc I_n est l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=n$.

2. Pour entier naturel non nul n :

$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$ or $f(x) \geq 0$ sur $[n; n+1]$ donc $I_{n+1} - I_n \geq 0$ et la suite (I_n) est croissante.

3.

```
from math import*
```

```
S=1/(2*exp(1))
```

```
for i in range (2,10):
```

```
    S= log(i)/(i**2)
```

```
print (S)
```

Remarques :

En langage Python la fonction logarithme népérien est noté log.

L'exécution de l'instruction : for i in range(2;10) donne à i les 8 valeurs successives 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

4. $I_n = \int_1^n f(x) dx$

$$f(x) = \ln(x) \times \frac{1}{x^2}$$

On effectue une intégration par parties.

$$u(x) = \ln(x) \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{x^2} \quad v(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\int_1^n f(x) dx = \left[-\frac{1}{x} \ln(x) \right]_1^n + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_1^n f(x) dx = -\frac{\ln(n)}{n} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n$$

$$I_n = -\frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{n} + 1 = \frac{n-1-\ln(n)}{n}$$

5. $I_n = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1$$