

Exercice 1

4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère :

. les points de l'espace $A(1;0;3)$, $B(2;1;-1)$, $C(1;1;1)$ et $H(0;2;1)$;

. le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que les points A , B et C définissent un plan de l'espace.
2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
3. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)
4. Vérifier que le point H appartient au plan (ABC) .
5. Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAH}$.
6. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (ABC) et passant par le point H .
7. Déterminer les coordonnées du point $S(x_S; y_S; z_S)$ de la droite (d) tel que
 - . la distance entre le point S et le plan (ABC) est 6 ;
 - . son abscisse x_S est positive.

CORRECTION

- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \frac{0}{1} \neq \frac{1}{1}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés et les points A, B et C définissent un plan.
- $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC) par exemples $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
 $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times 1 + 4 \times 1 + 2 \times (-4) = 4 + 4 - 8 = 0$
 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 0 + 4 \times 1 + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0$
 donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
- (ABC) est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
 (ABC): $4x + 4y + 2z + d = 0 \quad A(1;0;3)$
 $4 \times 1 + 4 \times 0 + 2 \times 3 = d = 0 \Leftrightarrow 4 + 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = -10$
 (ABC): $4x + 4y + 2z - 10 = 0$ ou (ABC): $2x + 2y + z - 5 = 0$
- $H(0;2;1) \quad 2 \times 0 + 2 \times 2 + 1 \times 1 - 5 = 0$ donc H appartient au plan (ABC).
- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 1 \times (-1) + 1 \times 2 + (-4) \times (-2) = -1 + 2 + 8 = 9$
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH \times \cos(\widehat{BAH}) = 9$
 $AB^2 = 1^2 + 1^2 + (-4)^2 = 1 + 1 + 16 = 18 = 9 \times 2 \quad AB = 3\sqrt{2}$
 $AH^2 = (-1)^2 + 1^2 + (-2)^2 = 1 + 4 + 4 = 9 \quad AH = 3$
 $9 = 3\sqrt{2} \times 3 \times \cos(\widehat{BAH})$ donc $\cos(\widehat{BAH}) = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\widehat{BAH} = 45^\circ$
- (d) est la droite passant par $H(0;2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{n}$.
 (d): $\begin{cases} x = 4t + 0 \\ y = 4t + 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases} \quad t^2 = 1 \quad t \in \mathbb{R}$
- H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) donc la distance entre le point S et le plan (ABC) est égale à SH.
 $S(4t; 4t+2; 2t+1) \quad H(0;2;1)$
 $SH^2 = (4t)^2 + (4t)^2 + (2t)^2 = 36t^2$
 $SH = 6 \quad SH^2 = 36 \Leftrightarrow 36 = 36t^2 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow (t=1 \text{ ou } t=-1)$
 l'abscisse de S est égale à $4t$, elle positive si est seulement si $t=1$.
 Donc $S(4;6;3)$.