

Exercice 3

6 points

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[2; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(3x^2 + 2x)$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
2. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[2; +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.
On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
- 2.a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
- 2.b. Donner une valeur de α arrondie au centième.
- 2.c. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, les réponses pourront s'appuyer sur les résultats de la **partie A**.

On définit une suite (a_n) par son 1^{er} terme $a_0 > 0$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n)$.

On étudie le cas où $2 \leq a_0 \leq \alpha$, où α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $2 \leq a_n \leq \alpha$.
2. Démontrer que la suite (a_n) est croissante.
3. Démontrer que la suite (a_n) converge.
4. Démontrer que la limite de la suite (a_n) est α .

Partie C

Dans cette partie, on prend $a_0 = 2$.

La suite (a_n) est ainsi définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n)$.

On note (b_n) la suite définie par $b_0 = 10$ et pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = \ln(3b_n^2 + 2b_n)$.

On admet que la suite (b_n) est strictement décroissante et qu'elle converge α .

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $a_n \leq b_n$.
2. On considère le script ci-dessous écrit en langage Python.

```
from math import*
def algo(p):
    a=2
    b=10
    n=0
    while b-a>10**(-p):
        a=log(3*a**2+2*a)
        b=log(3*b**2+2*b)
        n=n+1
    return (n,a)
```

On rappelle qu'en langage Python

- . la commande $\log(c)$ renvoie la valeur de $\ln(c)$.
- . la commande $a**2$ renvoie la valeur a^2 .

- 2.a. Donner les valeurs renvoyées par l'instruction `algo(2)`.

On arrondira si besoin les valeurs au millièème.

- 2.b. Interpréter les valeurs renvoyées dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

Partie A

1. Si $u(x) > 0$ sur l'intervalle I et si u est dérivable sur I alors $(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ pour $x \in I$.

$$x \in [2; +\infty[\quad f(x) = \ln(3x^2 + 2x) \quad u(3x^2 + 2x) > 0 \quad \text{et} \quad u'(x) = 6x + 2 \quad f'(x) = \frac{6x + 2}{3x^2 + 2x}$$

Si $x \geq 2$ alors $6x + 2 \geq 14 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

- 2.a. $g(2) = \ln(16) - 2 \simeq 0,77 > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

g est une fonction continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[2; +\infty[$ et à valeurs dans $]-\infty; \ln(16) - 2]$, $0 \in]-\infty; \ln(16) - 2[$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $[2; +\infty[$.

- 2.b. En utilisant la calculatrice (abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses) on obtient $\alpha = 4,05$ valeur arrondie au centième.

- 2.c. g est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$ et $g(\alpha) = 0$ donc : $f(\alpha) = \alpha$
si $2 \leq x < \alpha$ alors $g(x) > g(\alpha) = 0$ si $\alpha < x$ alors $g(\alpha) = 0 > g(x)$.

On donne le signe de $g(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	2	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

Partie B

1. Remarque : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$.

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $2 \leq x \leq \alpha$.

Initialisation

Pour $n=0$, $0 \leq a_0 \leq \alpha$ donc la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que $2 \leq a_n \leq \alpha$ et on doit démontrer que $2 \leq a_{n+1} \leq \alpha$.

Si $2 \leq a_n \leq \alpha$ alors $f(2) \leq f(a_n) \leq f(\alpha)$ car f est croissante sur $[2; +\infty[$.

$$f(2) = \ln(16) \geq 2 \quad f(a_n) = a_{n+1} \quad f(\alpha) = \alpha$$

donc $2 \leq a_{n+1} \leq \alpha$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , on a $2 \leq a_n \leq \alpha$.

2. Pour tout entier naturel n , on a $2 \leq a_n \leq \alpha$ donc $g(a_n) \geq g(\alpha)$ car g est décroissante sur $[2; +\infty[$.
 $g(a_n) = f(a_n) - a_n = a_{n+1} - a_n$ et $g(\alpha) = 0$.

On obtient $a_{n+1} - a_n \geq 0 \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$.

La suite (a_n) est croissante.

3. Pour tout entier naturel n , on a $a_n \leq \alpha$ donc la suite (a_n) est majorée par α .

Toute suite croissante et majorée est convergente.

La suite (a_n) converge.

4. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ alors $f(L) = L$.

Comme l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[2; +\infty[$ est α donc $L = \alpha$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha$.

Partie C

1. On peut démontrer de même que pour tout entier naturel n , on a $\alpha \leq b_n \leq 10$.

Donc pour tout entier naturel n , on a : $a_n \leq \alpha \leq b_n$ donc $a_n \leq b_n$.

2.a. On peut utiliser le tableur de la calculatrice.

On obtient : $n=10$ et $a_{10}=4,045$ valeur arrondie au millième.

2.b. 10 est la plus petite valeur de n telle que $b_n - a_n \leq 10^{-2}$.