

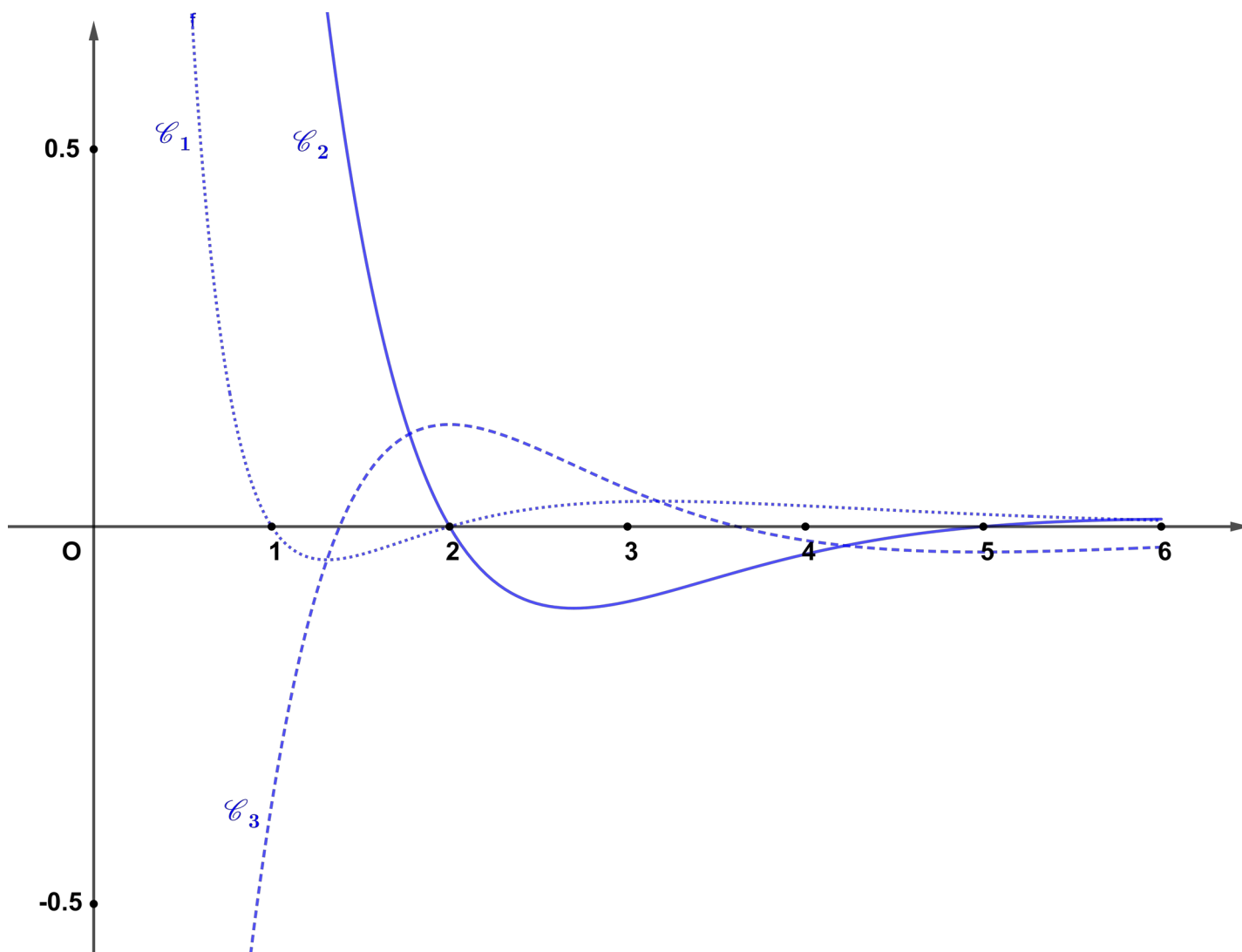
Exercice 4

6 points

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

Les courbes correspondent aux représentations graphiques de trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$; une fonction sa dérivée f' et sa dérivée seconde f'' .



Associer chacune des fonctions f , f' et f'' à sa courbe représentative.

Aucune justification n'est attendue.

Partie B

On considère l'équation différentielle (E) définie par $y' + y = (2x - 3)e^{-x}$ où y est une fonction de la variable x .

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x^2 - 3x)e^{-x}$.

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0)=2$.

Partie C

On considère la fonction f définie par : $f(x)=e^{-x}(x^2-3x+2)$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2.a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2.b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. On note I l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$.

3.a. À l'aide de deux intégration par parties successives, démontrer que $I = 1 - \frac{1}{e}$.

3.b. Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie D

On considère un réel a .

On note (T_a) la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .

1. Démontrer que le point d'intersection de la tangente (T_a) et de l'axe des ordonnées a pour ordonnée : $(a^3 - 4a^2 + 2a + 2)e^{-a}$.

2. Déterminer le nombre de tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine.
Le candidat explicitera les étapes de la démarche utilisée.

CORRECTION

Partie A

$\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de f .

$\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de f' .

$\mathcal{C}_2$ est la courbe représentative de f'' .

Remarque

f_1 change de signe pour la valeur $x=1$ donc si f_1 est la fonction dérivée de f_2 ou f_3 alors ces fonctions doivent avoir un maximum pour $x=1$ ce qui n'est pas le cas donc $f_1=f$.

f_1 est d'abord décroissante et f_3 est d'abord négative donc $f_3=f'$ et $f_2=f''$.

Partie B $\Leftrightarrow$

1. $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = (x^2 - 3x)e^{-x}$ g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = (2x - 3)e^{-x} + (x^2 - 3x)(-e^{-x}) = (2x - 3 - x^2 + 3x)e^{-x} = (-x^2 + 5x - 3)e^{-x}$$

Pour tout réel x :

$$g'(x) + g(x) = (-x^2 + 5x - 3)e^{-x} + (x^2 - 3x)e^{-x} = (2x - 3)e^{-x}$$

g est une solution particulière de l'équation (E).

2. $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y \Leftrightarrow y' = ay$ avec $a = -1$

Les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions h_k définies sur $\mathbb{R}$ par $h_k(x) = k e^{-x}$ avec k constante réelle.

3. $y' + y = (2x + 3)e^{-x} \Leftrightarrow y' + y = g'(x) - g(x) \Leftrightarrow (y - g)'(x) + (y + g)(x) = 0$
donc $y - g(x) = k e^{-x} \Leftrightarrow y = k e^{-x} + (x^2 - 3x)e^{-x} \Leftrightarrow y = (x^2 - 3x + k)e^{-x}$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = (x^2 - 3x + k)e^{-x}$ avec k constante réelle.

4. $f_k(0) = 2 \Leftrightarrow k = 2$

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$$

Partie C

1. $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$ pour tout réel x on a : $e^{-x} > 0$ donc le signe de $f(x)$ est le signe de $x^2 - 3x + 2$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

En utilisant le signe du trinôme, on donne le signe de $f(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
f(x)		+ 0	− 0	+

2.a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 2) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2.b. $f(x) = \frac{x^2}{e^x} + \frac{3x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \text{ conséquence : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$3.a. I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)e^{-x} dx$$

$$u(x) = x^2 - 3x + 2 \quad u'(x) = 2x - 3$$

$$v'(x) = e^{-x} \quad v(x) = -e^{-x}$$

u et v sont dérivables u' et v' sont continues.

En utilisant la formule d'intégration par parties.

$$I = [-(x^2 - 3x + 2)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (2x - 3)(-e^{-x}) dx = [-(x^2 - 3x + 2)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 (2x - 3)e^{-x} dx$$

$$[-(x^2 - 3x + 2)e^{-x}]_0^1 = 0 + 2 = 2$$

$$J = \int_0^1 (2x - 3)e^{-x} dx$$

$$w(x) = 2x - 3 \quad w'(x) = 2$$

$$v'(x) = e^{-x} \quad v(x) = -e^{-x}$$

w et v sont dérivables w' et v' sont continues

$$J = [-(2x - 3)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-2e^{-x}) dx$$

$$[-(2x - 3)e^{-x}]_0^1 = e^{-1} - 3 = \frac{1}{e} - 3$$

$$\int_0^1 (-2e^{-x}) dx = [2e^{-x}]_0^1 = 2e^{-1} - 2 = \frac{2}{e} - 2$$

$$J = \frac{1}{e} - 3 - \left(\frac{2}{e} - 2\right) = -\frac{1}{e} - 1$$

$$I = 2 - \frac{1}{e} - 1 = 1 - \frac{1}{e}$$

- 3.b. f est positive sur $[0; 1]$, f est continue sur $[0; 1]$ donc I est l'aire, en unité d'aire, du domaine plan compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
(Le domaine est en partie hachuré sur la figure donnée en fin de correction).

Partie D

1. Une équation cartésienne de (T_a) tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a est :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y = f'(a)x + f(a) - a \times f'(a)$$

L'ordonnée à l'origine de (T_a) est : $f(a) - a \times f'(a)$

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x} \text{ donc } f(a) = (a^2 - 3a + 2)e^{-a}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = (2x - 3)e^{-x} + (x^2 - 3x + 2)(-e^{-x}) = (-x^2 + 5x - 5)e^{-x}$$

$$f'(a) = (-a^2 + 5a - 5)e^{-a}$$

$$f(a) - a \times f'(a) = (a^2 - 3a + 2)e^{-a} - (-a^3 + 5a^2 - 5a)e^{-a} = (a^3 - 4a^2 + 2a + 2)e^{-a}$$

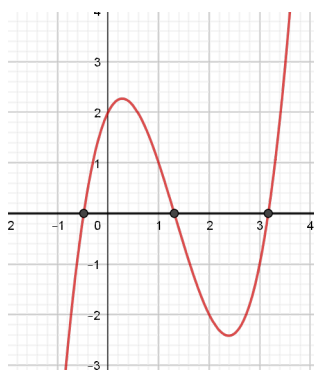
2. (T_a) passe par l'origine si et seulement si l'ordonnée à l'origine est égale à 0 si et seulement si :
 $a^3 - 4a^2 + 2a + 2 = 0$ (car $e^{-a} \neq 0$).

On peut utiliser la calculatrice en déterminant les points d'intersection de la fonction h définie par $h(a) = a^3 - 4a^2 + 2a + 2$ et l'axe des abscisses.

On obtient 3 points d'intersection d'abscisses (arrondies au centième) :

$$a_1 = -0,48 \quad a_2 = 1,31 \quad a_3 = 3,17$$

Il existe 3 tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine.



On donne une figure en traçant les tangentes correspondant aux points d'abscisses positives.
La troisième tangente pour $a_1 = -0,48$ l'ordonnée du point A_1 est supérieure à 2.

