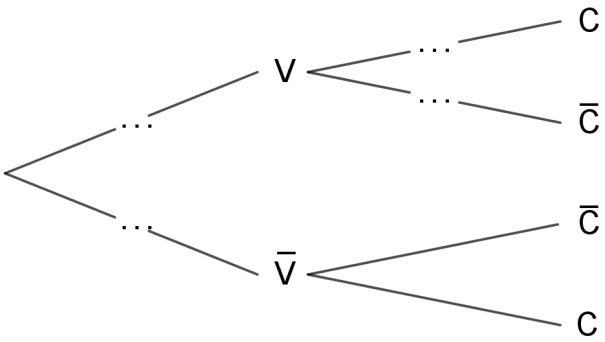
Exercice 1 — 5 points

Un navire assure la liaison entre deux ports de la Méditerranée.
Lors d'une traversée , une famille a la possibilité de réserver une cabinne ainsi qu'un emplacement pour un véhicule.

Partie A

Parmi l'ensemble des familles effectuant la traversée,on constate que 30 % réservent un emplacement pour un véhicule et, parmi ces dernières, 80 % réservent une cabine.
On choisit au hasard une famille effectuant la traversée, et on considère les évènement suivant :
. V : « la famille réserve un emplacement pour un véhicule « ;
. C : « la famille réserve une cabine ».
Pour un évènement quelconque E, on désigne par $\overline{E}$ son évènement contraire et par $P(E)$ sa probabilité.

1.a. Donner $P(C)$.
1.b. Reproduire l'arbre ci-dessous et compléter les quatre pointillés.



2. Calculer la probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine.

3. Une famille a réservé une cabine.
Déterminer la probabilité qu'elle réserve un emplacement pour un véhicule.

4. Déterminer $P_{\overline{V}}(C)$. On arrondira le résultat à 10^{-2}.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Sur ce trajet, la réservation d'une cabine et d'un emplacement pour véhicule sont facturés en supplément du coût de la traversée.
. 100 € pour une cabine.
. 70 € pour un emplacement de véhicule.
On suppose qu'une famille peut réserver au maximum une cabine et au maximum un emplacement pour un véhicule.
À ces suppléments peuvent s'ajouter le prix payé pour des extras (repas, boissons, etc . . .).
On note X la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les suppléments.
On donne ci-dessous la loi de probabilité de X.

x_i	0	70	100	170
$P(x_i)$	0.19	0.06	0.51	0.24

On note Y la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro pour les extras.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

On admet que la variable aléatoire Y a pour espérance $E(Y)=104$ et pour variance $V(Y)=1686$.
On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.

1. Justifier que $E(X)=96$ et que $v(X)=3114$.

2. À titre exceptionnel, la compagnie propose une remise de 40 % sur les suppléments et les extras.
On note Z la variable aléatoire qui, à chaque famille effectuant la traversée, associe le montant total pour les suppléments et les extras, en euro, payé par cette famille après réduction.

2.a. Justifier que $Z=0{,}6(X+Y)$.

2.b. En déduire que $E(Z)=120$ et que $V(Z)=1728$
où $E(Z)$ est l'espérance de la variable aléatoire Z et $V(Z)$ sa variance.

3. On note n un entier natirel non nul et on choisit au hasard un échantillon de n familles effectuant cette traversée bénéficiant de la réduction exceptionnelle définie en question **2.**
On admet que ce choix peut être assimilé à un tirage avec remise .
On désigne par Z_1 la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la première famille, Z_2 la va riable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la deuxième famille et ainsi de suite, Z_n la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la $n^{ième}$ famille.
On considère la variable aléatoire $M_n=\dfrac{Z_1+Z_2+\ldots+Z_n}{n}$ donnant le prix total moyen pour les suppléments et les extras, payé par ces familles.
On admet que les variables Z_1, Z_2 . . . Z_n sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire Z.

3.a. Montrer que l'espérance $E(M_n)$ de la variable M_n est égale à 120 et que sa variance $V(M_n)$ est égale à $\dfrac{1728}{n}$.

3.b. Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que : $P(114<M_n<126)\geqslant 0{,}85$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

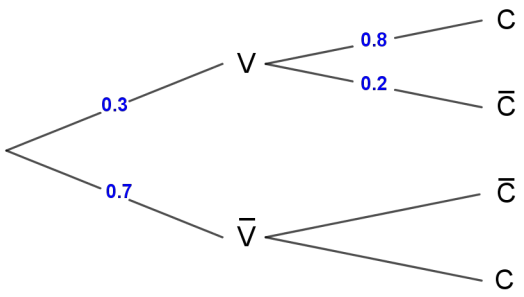
CORRECTION

Partie A

1.a. L'énoncé précise : 75 % des familles effectuant la traversée réserve une cabine donc $P(C)=0,75$.

1.b. L'énoncé précise : $P(V)=0,3$ donc $P(\overline{V})=1-0,3=0,7$ et $P_V(C)=0,8$ donc $P_V(\overline{C})=1-0,8=0,2$.

On obtient :



2. $P(V\cap C)=P(V)\times P_V(C)=0,3\times 0,8=0,24$

3. On nous demande de calculer $P_C(V)$.

$P_C(V)=P\left(\dfrac{V\cap C}{P(C)}\right)=\dfrac{0,24}{0,75}=0,32$.

4. En utilisant la formule des probabilité totales

$P(C)=P(V\cap C)+P(\overline{V}\cap C)$

$0,75=0,24+P(\overline{V})\times P_{\overline{V}}(C) \quad\Leftrightarrow\quad 0,51=0,7\times P_{\overline{V}}(C) \quad\Leftrightarrow\quad P_{\overline{V}}(C)=\dfrac{0,51}{0,7}=0,73$ arrondi à 10^{-2}.

73 % des familles n'ayant pas réservé d'emplacement véhicule ont réservé une cabine.

Partie B

1. $E(X)=0\times 0,19+70\times 0,06+100\times 0,51+170\times 0,24=4,2+51+40,8$

$E(X)=96$

$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$E(X^2)=4900\times 0,06+10000\times 0,51+28900\times 0,24=294+5100+6936=12330$

$[E(X)]^2=96^2=9216$

$V(X)=12330-9216=3114$

2.a. Le montant total (en euro) des suppléments et extras avant réduction est : $X+Y$.

Le montant de la réduction est : $\dfrac{40}{100}\times(X+Y)=0,4\times(X+Y)$.

Le montant total après réduction est $Z=X+Y-0,4\times(X+Y)=0,6\times(X+Y)$.

2.b. $E(Z)=E(0,6\times(X+Y))=0,6\times E(X+Y)=0,9\times(E(X)+E(Y))=0,6\times(96+104)=0,6\times 200$

$E(Z)=120$

$V(Z)=V(0,6\times(X+Y))=0,6^2\times V(X+Y)=0,36(V(X)+V(Y))$ car X et Y sont indépendantes.

$V(Z)=0,36\times(3114+1686)=0,36\times 4800=1728$.

3.a. $E(Z_1)=E(Z_2)=\ldots=E(Z_n)=E(Z)=120$

$E(M_n)=\dfrac{1}{n}\times E(Z_1+Z_2+\ldots+Z_n)=\dfrac{1}{n}(n\times E(Z))=E(Z)=120$

$V(Z_1)=V(Z_2)=\ldots=V(Z_n)=V(Z)=1728$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$V(M_n)=\frac{1}{n^2}\times V(Z_1+Z_2+\ldots+Z_n)=\frac{1}{n^2}\times(V(Z_1)+V(Z_2)+\ldots+V(Z_n))$

car les n variables aléatoires Z_1, Z_2, . . ., Z_n sont indépendantes.

$V(M_n)=\frac{1}{n^2}\times(n\,V(Z))=\frac{V(Z)}{n}=\frac{1728}{n}$.

3.b. $114<M_n<126 \Leftrightarrow 114-120<M_n-120<126-120 \Leftrightarrow -6<M_n-E(M_n)<6$
$\Leftrightarrow |M_n-E(M_n)|<6$

L'évènement contraire de $(|M_n-E(M_n)|<6)$ est l'évènement $(|M_n-E(M_n)|\geqslant 6)$.

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$P(|M_n-E(M_n)|\geqslant 6)\leqslant\frac{V(M_n)}{6^2}=\frac{1728}{36\,n}=\frac{48}{n}$ donc $-P(|M_n-E(M_n)|\geqslant 6)\geqslant-\frac{48}{n}$

$P(114<M_n<126)=1-P(|M_n-E(M_n)|\geqslant 6)\geqslant 1-\frac{48}{n}$

Pour avoir $P(114<M_n<126)\geqslant 0{,}85$ il suffit d'avoir $1-\frac{48}{n}\geqslant 0{,}85$.

$1-\frac{48}{n}\geqslant 0{,}85 \Leftrightarrow 0{,}15\geqslant\frac{48}{n} \Leftrightarrow n\geqslant\frac{48}{0{,}15}=320$

Donc 320 est la plus petite valeur de n permettant d'affirmer que $P(114<M_n<126)\geqslant 0{,}85$.

Si le nombre de familles est supérieur ou égal à 320 pour cette traversée avec réduction alors le coût moyen payé par les familles pour les suppléments et les extras sera strictement compris entre 114 et 126 euros avec un taux de confiance de 85 %.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés