Exercice 2 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère :

. la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = t \\ y = -1,5 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$;

. les points $A(3;0;2)$ et $B(2;1;-3)$;

. le plan $(\mathscr{P})$ d'équation : $-x + y - 5z - 0,5 = 0$.

1.a. Affirmation 1 :
Le plan $(\mathscr{P})$ est orthogonal à la droite (AB), et passe par le milieu de [AB].

1.b. Affirmation 2 :
Les droites (d) et (AB) sont sécantes.

1.c. On considère le point C de coordonnées (1,5 ;-3 ;-4).
Affirmation 3 :
La mesure de l'angle $\widehat{ACB}$, arrondie à 10^{-1}, est égale à 70,5°.

2. Titouan et Clotilde participent à un espace game. Ils se retrouvent dans une salle possédant deux portes de sortie, A et B, chacune protégée par un digicode équipé de 8 touches portant des symboles différents.

. le digicode de la porte A utilise un code de 3 symboles différents devant être saisis dans l'ordre ;

. celui de la porte B utilise un code de 4 symboles différents qui peuvent être saisis dans n'importe quel ordre.

N'étant pas parvenus à obtenir d'indices, ils décident de procéder au hasard à la saisie des codes.
Clotilde choisit un code pour la porte A, et Titouan choisit un code pour la porte B.
On considère que les choix des codes sont équiprobables.
Affirmation 4 :
Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clothilde.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

$(\mathscr{P})$: $-x+y-5z-0,5=0$ donc $\vec{N}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}=\vec{N}$

donc le plan $(\mathscr{P})$ est orthogonal à la droite (AB).

I est le milieu de [AB], $x_I=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2}=2,5$ $y_I=\frac{0+1}{2}=0,5$ $z_I=\frac{2-3}{2}=\frac{-1}{2}=-0,5$ $I(2,5;0,5;-0,5)$.

Or : $-2,5+0,5+5\times(-0,5)-0,5=-2,5+0,5+2,5-0,5=0$

donc le milieu du segment [AB] appartient au plan $(\mathscr{P})$.

Affirmation 2 : FAUSSE

Preuve

(AB) est droite passant par $A(3;0;2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

Une représentation paramétrique de (AB) est : $\begin{cases}x=-k+3\\y=k\\z=-5k+2\end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$ (d) : $\begin{cases}x=t\\y=-1,5-t\\z=2-2t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

Pour déterminer l'intersection de (d) et (AB) on résout le système :

$$\begin{cases}t=-k+3\\-1,5-t=k\\2-2t=-5k+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1,5+t+3\\k=-1,5+t\\2-2t=-5\times(-1,5-t)+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\times t=4,5\\k=-1,5-t\\2-2t=2,5+5t+2\end{cases}$$

La 1ère équation n'admet pas de solution donc le système n'admet pas de solution .

Les droites (d) et (AB) ne sont pas sécantes.

Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1,5\\3\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0,5\\4\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=1,5\times0,5+3\times4+3\times(-2)=0,75+12-6=6,75$

$CA^2=1,5^2+3^2+3^2=2,25+9+9=20,25$ $CA=\sqrt{20,25}=4,5$

$CB^2=0,5^2+4^2+(-2)^2=0,25+16+4=20,25$ $CB=\sqrt{20,25}=4,5$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA\times CB\times\cos(\widehat{ACB})\Leftrightarrow 6,75=4,5\times4,5\times\cos(\widehat{ACB})\Leftrightarrow\cos(\widehat{ACB})=\frac{6,75}{20,25}=\frac{1}{3}$

En utilisant la calculatrice : $\widehat{ACB}=70,5^\circ$ valeur arrondie à 10^{-1}.

Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

Pour la porte A un code est un arrangement de 3 éléments d'un ensemble de 8 éléments, donc le nombre de codes possibles est : $\frac{8!}{(8-3)!}=\frac{8!}{5!}=8\times7\times6=336$.

Pour la porte B un code est une combinaison de 4 éléments d'un ensemble de 8 éléments , donc le nombre de codes possibles est : $\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!(8-4)!}=\frac{8!}{4!4!}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=7\times2\times5=70$.

La probabilité que Clotilde ouvre la porte A avec un essai est : $\frac{1}{336}$.

La probabilité que Titouan ouvre la porte B avec un essai est : $\frac{1}{70}$.

Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés