Exercice 3 — 6 points

On étudie le fonctionnement d'un système de chauffage installé dans une pièce.
Ce système se déclenche automatiquement dès que la température de la pièce est inférieure ou égale à 18°C (degrés Celsius) et s'éteint lorsqu'elle atteint 20°C.

Partie A : Phase de chauffage

Pour une température de la pièce variant de 18°C à 20°C, le système de chauffage fonctionne en continu.
La température de la pièce augmente progressivement.
Dans cette partie, on modélise la température de la pièce, en degré Celsius, à l'instant t, exprimé en dizaines de minutes par une fonction T définie sur $[0;+\infty[$.
On admet que la fonction T est :
. dérivable sur $[0;+\infty[$;
. solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0{,}035\,y - 0{,}91$
où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.
On suppose qu'au début de l'étude, la température de la pièce est de 18°C.
Ainsi $T(0) = 18$.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0;+\infty[$.

2. En déduire que, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, on a : $T(t) = 26 - 8\,e^{-0{,}05t}$.

3. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps la pièce atteindra la température de 20°C.
On exprimera le résultat en heures et minutes arrondi à la minute.

4. Si une panne du système de chauffage l'empêche de s'éteindre lorsque la température de la pièce atteint 20°C, la température de la pièce pourra-t-elle dépasser 28°C selon ce modèle ?
Justifier.

Partie B : Phase de refroidissement

Lorsque la pièce atteint la température de 20°C, le système de chauffage s'éteint et la pièce refroidit.
On modélise la température de la pièce par la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 0{,}965\,u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,e^{-0{,}1\,n}$
où n est un nombre entier exprimant le temps écoulé en dizaines de minutes

1. Montrer que $u_1 = 19{,}72$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 10$.

On admet que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On note L la limite de la suite (u_n).
4.a. Justifier que cette limite est solution de l'équation $x = 0{,}965\,x + 0{,}35$.
4.b. Déterminer L et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. On rappelle que le système de chauffage se met en marche automatiquement dès que la température de la pièce est inférieure ou égale à 18°C.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

5.a. Recopier et complé les lignes 4, 5 et 6 du programme écrit en Python ci-dessous afin qu'il renvoie le nombre de dizaines de minutes à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

```
1   def marche( ):
2     n=0
3     u=20
4     While . . . .:
5       u= . . . .
6       n= . . . .
7.    return n
```

5.b. Déterminer le temps en dizaines de minutes , à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A : Phase de chauffage

1. (E) est une équation différentielle du type $y'=a\,y+b$ avec $a=-0{,}035$ et $b=0{,}91$.
Les solutions de (E) sur $[0;+\infty[$ sont les fonctions f_k définies sur $[0;+\infty[$ par $f_k(t)=k\,e^{at}-\dfrac{b}{a}$ avec $k\in\mathbb{R}$, $-\dfrac{b}{a}=\dfrac{0{,}91}{0{,}035}=26$ donc les solutions de (E) sur $[0;+\infty[$ sont les fonctions f_k définies sur $[0;+\infty[$ par $f_k(t)=k\,e^{-0{,}035\,t}+26$ $k\in\mathbb{R}$.

2. T est la solution de (E) vérifiant $T(0)=18$.
$f_f(0)=k\times e^{0}+26 \Leftrightarrow 18=k+26 \Leftrightarrow k=-8$.
Donc, pour $t\in[0;+\infty[$ $T(t)=26-8\,e^{-0{,}035\,t}$.

3. $T(t)=20 \Leftrightarrow 26-8\,e^{-0{,}05\,t}=20 \Leftrightarrow 6=8\,e^{-0{,}035\,t} \Leftrightarrow \dfrac{6}{8}=e^{-0{,}035\,t} \Leftrightarrow 0{,}75=e^{-0{,}035\,t}$
$\Leftrightarrow \ln(0{,}75)=-0{,}035\,t \Leftrightarrow t=\dfrac{\ln(0{,}75)}{-0{,}035}\simeq 8{,}22$ (en dizaines de minutes).
$t\simeq 82{,}2$ min donc $t\simeq 1\,\text{h}\,22\,\text{min}$

4. $T'(t)=8\times 0{,}035\,e^{-0{,}035t}>0$ donc T est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
$\lim\limits_{t\to+\infty}(-0{,}035\,t)=-\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-0{,}035t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}T(t)=26$
Pour $t\in[0;+\infty[$ $T(t)\leqslant 26$ donc la température de la pièce ne pourra pas atteindre 28°.

Partie B : Phase de refroidissement

1. $u_1=0{,}965\,u_0+0{,}35+0{,}07\,e^{-0{,}1\times 0}=0{,}965\times 20+0{,}35+0{,}07$
$u_1=19{,}3+0{,}35+0{,}07=19{,}72$

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n>10$.
Initialisation
$u_0=20>10$ donc propriété est vérifiée pour $n=0$.
Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n>10$ et on doit démontrer que $u_{n+1}>10$.
Si $u_n>10$ alors $0{,}965\,u_n>0{,}965\times 10=9{,}65$ et $0{,}965\,u_n+0{,}36+0{,}07\,e^{-0{,}1\,n}>9{,}65+0{,}35+0{,}07\,e^{-0{,}1\,n}$
donc $u_{n+1}>9{,}65+0{,}35=10$ (car $0{,}07\,e^{-0{,}1\,n}>0$).
Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n>10$.

3. On admet que (u_n) est une suite décroissante et on a (u_n) minorée par 10.
Toute suite décroissante et minorée est convergente donc la suite (u_n) converge.

4.a. On note $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=L$.
Pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}965\,u_n+0{,}35+0{,}07\,e^{-0{,}1\,n}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty}-0{,}1\,n=-\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-0{,}1n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=L$
Donc $L=0{,}965\,L+0{,}35$ et L est solution de l'équation $x=0{,}965\,x+0{,}35$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

4.b. $L = 0{,}965L + 0{,}35 \Leftrightarrow L - 0{,}965L = 0{,}35 \Leftrightarrow 0{,}035L = 0{,}35 \Leftrightarrow L = \dfrac{0{,}35}{0{,}035} = 10$

Si le chauffage ne se remet pas en marche alors la température de la pièce diminuera pour atteindre des valeurs voisines de 10°C.

5.a.

```
1   def marche( ):
2       n=0
3       u=20
4       While u>18:
5           u= 0.965 * u + 0.35 + 0.07 * exp(-0.1 * n)
6           n= n+1
7.      return n
```

5.b. En utilisant la calculatrice et en calculant les premiers termes (ou en utilisant le tableur de la calculatrice), on obtient :

$u_7 \simeq 18{,}1217$ et $u_8 \simeq 17{,}8722$.

Donc $n = 8$ dizaines de minutes, le chauffage se remettra en route au bout de 8 diaines de minutes.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés