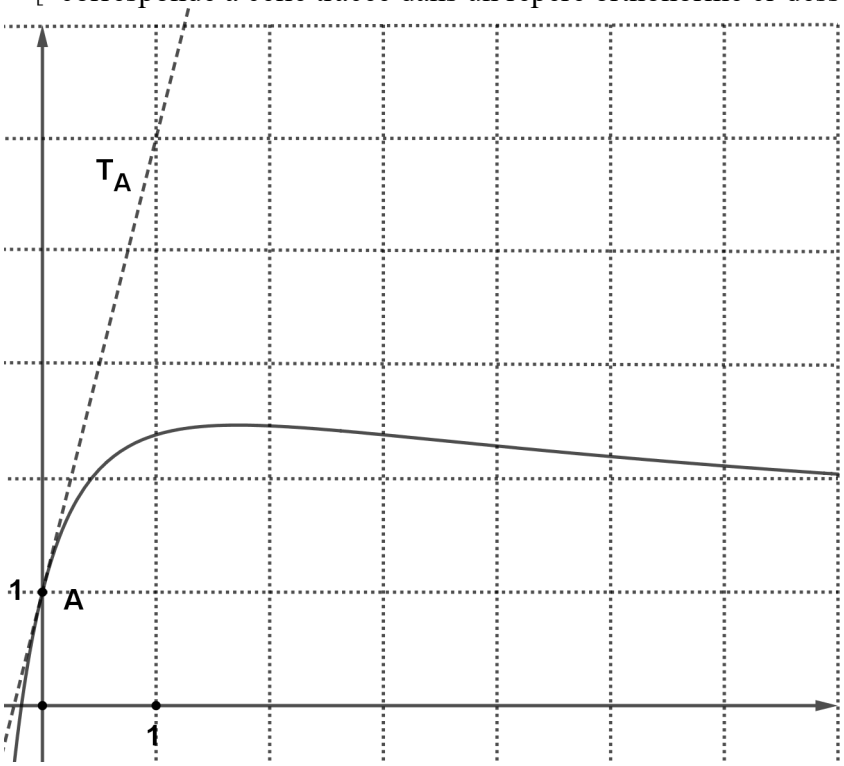
Exercice 4 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=a+\dfrac{b\ln(x+1)}{x+1}$ où a et b sont des réels, et $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]-1;+\infty[$.
On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

L'objectif de cette partie et de déterminer les valeurs de a et b de sorte que la courbe représentative de la fonction f sur $]-1;+\infty[$ corresponde à celle tracée dans un repère orthonormé ci-dessous :



On précise que la T_A est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $A(0;1)$.

1. Justifier que $a=1$

2. En utilisant le graphique :
2.a. Donner la valeur de $f'(0)$.
Justifier.
2.b. Donner le signe de $f''(1)$.
Justifier.

3.a. Montrer que pour tout réel x appartenant à $]-1;+\infty[$, on a : $f'(x)=\dfrac{b(1-\ln(x+1))}{(x+1)^2}$.

3.b. En déduire la valeur de b.

Partie B

On admet dans la suite de l'exercice que la fonction f est définie sur $]-1;++\infty[$ par : $f(x)=1+\dfrac{4\ln(x+1)}{x+1}$

1. Justifier que la droite d'équation y=1 est asymptote à la courbe représentative de la fonction f.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

2. Résoudre $1-\ln(x+1)>0$ sur $]-1;+\infty[$.

3. On admet que $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$.

Dresser le tableau de variation complet de la fonction f en indiquant la valeur exacte de son extremum. Justifier.

4. Montrer que l'équation $f(x)=1{,}5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2;+\infty[$.
En donner une valeur approchée à 10^{-1}.

5.a. Montrer que : $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx=\frac{1}{2}(\ln 3)^2$.

5.b. En déduire l'aire,en unité d'aire, du domaine délimité par l'axz des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=2$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

1. $x\in]-1;+\infty[\quad f(x)=a+\dfrac{b\ln(x+1)}{x+1}$

La courbe représentative de f passe par le point A(0;1) donc $f(0)=1$.

Or $f(0)=a+\dfrac{b(\ln(0+1))}{0+1}=a$ donc $a=1$.

2.a. $f'(0)$ est le coefficient directeur de T_A tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A(0;1).

Or T_A passe par le point B(1;5) donc le coefficient directeur de T_A est égal à :

$\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{5-1}{1-0}=4$ et $f'(0)=4$.

2.b. Par lecture graphique, f est concave sur [0;2] donc $f''(1)<0$.

3.a. $f(x)=a+b\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right) \qquad f'(x)=b\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)'$

$u(x)=\ln(x+1) \qquad u'(x)=\dfrac{1}{x+1} \qquad v(x)=x+1 \qquad v'(x)=1$

$u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)=\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\times(x+1)-\ln(x+1)\times 1=1-\ln(x+1)$

$f'(x)=b\left(\dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)=\dfrac{b(1-\ln(x+1))}{(x+1)^2}$

3.b. $f'(0)=4$ et $f'(x)=\dfrac{b(1-\ln(0+1))}{(0+1)^2}=b$ donc $b=4$ et $f(x)=1+\dfrac{4\ln(x+1)}{x+1}$.

Partie B

1. $X=x+1 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} X=+\infty$

$\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=\dfrac{\ln(X)}{X} \qquad \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(X)}{X}=0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$

Conséquence : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ donc la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

2. $\begin{cases} x>-1 \\ 1-\ln(x+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ 1>\ln(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ e^1>x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ e-1>x \end{cases} \Leftrightarrow \{ -1<x<e-1$

$\mathscr{S}=$]-1;e-1[

3. On admet que $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$.

Sur $]-1;+\infty[$, le signe de $f'(x)$ de (1-ln(x+1))

x	-1		e-1		+∞
f '(x)	‖	+	0	−	
f(x)	‖ -∞	↗	$1+4e^{-1}$	↘	1

$f(e-1)=1+\dfrac{4\ln(e-1+1)}{e-1+1}=1+\dfrac{4}{e}=1+e^{-1}\simeq 2{,}47$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

4. $e-1\simeq 1{,}72<2$.

f est continue et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$ à valeurs dans $]1;f(2)]$ or $f(2)=1+\dfrac{4\ln(3)}{3}\simeq 2{,}46$

donc on a : $1<1{,}5\leqslant f(2)$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=1{,}5$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[2;+\infty[$.

Pour avoir une valeur approchée de α on utilise la calculatrice.

$f(20)\simeq 1{,}5799$ $f(30)\simeq 1{,}4431$ donc $20<\alpha<30$

$f(25)\simeq 1{,}5012$ $f(26)\simeq 1{,}4883$ donc $25<\alpha<26$

$f(25)\simeq 1{,}5012$ $f(25{,}1)\simeq 1{,}4999$ donc 25,1 est une valeur arrondie à 10^{-1} de α .

5.a. On considère la fonction u définie sur [0;2] par $u(x)=\ln(x+1)$ on a : $u'(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

$g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=u(x)\times u'(x)$

donc une primitive de g est G définie par $G(x)=\dfrac{1}{2}u^2(x)=\dfrac{1}{2}(\ln(x+1))^2$.

$\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2\right]_0^2=\frac{1}{2}(\ln(3))^2-0$

5.b. f est continue et positive sur [0;2], donc l'aire, en unité d'aire , domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x=2 est égale à $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.

On a : $f(x)=1+4g(x)$

donc une primitive de f sur [0;2] est F définie par $F(x)=x+4G(x)=x+2(\ln(x+1))^2$

$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = [x+2(\ln(x+1))^2]_0^2=2+2(\ln(3))^2-0=2+2(\ln(3))^2$ U.A.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés