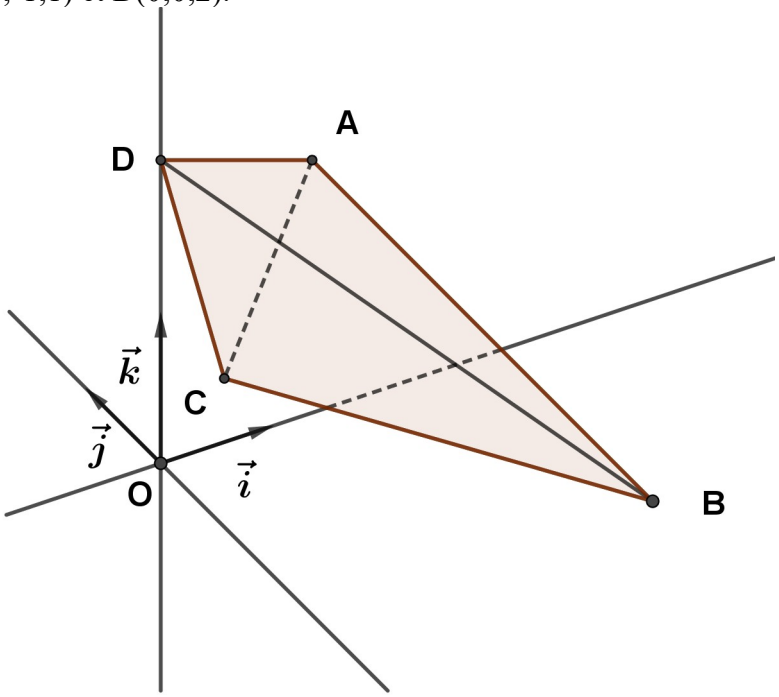
Exercice 1 — 5 points

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points :
A(2;1;1) ; B(3 ;-2;0) ; C(0 ;-1;1) et D(0;0;2).



1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2.a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

2.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x-y+4z-5=0$.

3. Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et orthogonale au plan (ABC) est donnée par : $\begin{cases}x=\ \ t\\y=-t\\z=2+4t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

4. Montrer que le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point $H\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{6};\frac{4}{3}\right)$.

5.a. Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.
5.b. Montrer que l'aire du triangle ABC est $3\sqrt{2}$.

6.a. En déduire que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 1.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V=\frac{1}{3}\mathcal{B}\,h$ *où* $\mathcal{B}$ *est l'aire d'une base et* h *la hauteur relative à cette base.*
6.b. On admet que la distance du point A au plan (BCD) est égale à $\sqrt{2}$.
En déduire l'aire du triangle BCD.

7. Dans cette question, on note D_k le point ayant pour coordonnées $(0;0;k)$, où k est un réel.
7.a. Déterminer la valeur de k pour laquelle les points A, B, C et D_k sont coplanaires.
Quel est alors le projeté orthogonal du point D_k sur le plan (ABC) ?
7.b. Peut-on trouver une valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur le plan (ABC).

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. A(2;1;1) B(3 ;-2;0) C(0 ;-1;1)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}1=-2\lambda\\-3=-2\lambda\\-1=0\times\lambda\end{cases}$ ce système n'admet pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés donc définissent un plan.

2.a. Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC) par exemples $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1\times1+(-1)\times(-3)+4\times(-1)=1+3-4=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1\times(-2)+(-1)\times(-2)+4\times0=-2+2+0=0$

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2.b. (ABC) est le plan de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par A donc :

$(ABC):\quad x-y+4z+d=0$

$A(2;1;1)\quad 2-1+4+d=0 \Leftrightarrow d=-5$

$(ABC):\quad x-y+4z-5=0$.

3. Δ est la droite de vecteur $\vec{n}$ et passant par $D(0;0;2)$ donc :

$\Delta : \begin{cases}x=t\\y=-t\\z=2+4t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

4. Le projeté orthogonal H de D sur (ABC) et le point d'intersection de Δ et (ABC).

On résout le système :

$\begin{cases}x-y+4z-5=0\\x=t\\y=-t\\z=2+4t\end{cases}$ On obtient : $t+t+4\times(2+4t)-5=0 \Leftrightarrow 18t+3=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{6}$

$x_H=-\frac{1}{6}\quad y_H=\frac{1}{6}\quad z_H=2-\frac{4}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\quad H\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{6};\frac{4}{3}\right)$

5.a. $BA^2=(3-2)^2+(-2-1)^2+(0-1)^2=1^2+3^2+1^2=11\quad BA=\sqrt{11}$

$BC^2=(3-0)^2+(-2+1)^2(1-0)^2=3^2+1^2+1^2=11\quad BC=\sqrt{11}$

$BA=BC=\sqrt{11}$ donc le triangle ABC est isocèle en B.

5.b. I est le milieu de [AC], BI est la hauteur du triangle ABC issue de B.

$I\left(\frac{2+0}{2};\frac{1-1}{2};\frac{1+1}{2}\right)\quad I(1;0;1)$

$BI^2=(1-3)^2+(0+2)^2+(1+0)^2+2^2+1^2=9\quad BI=3$

$AC^2=(0+2)^2+(-1-1)^2+(1-1)^2=2^2+2^2+0^2=8\quad AC=\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=2\sqrt{2}$

L'aire du triangle ABC est égale à : $\frac{1}{2}\times AC\times BI=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times3=3\sqrt{2}$.

6.a. H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) donc DH est la hauteur du tétraèdre ABCD relative à la base ABC.

$DH^2=\left(-\frac{1}{6}-0\right)^2+\left(\frac{1}{6}-0\right)^2+\left(\frac{4}{3}-2\right)^2=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{4}{9}=\frac{1+1+16}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}\quad DH=h=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$V=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1$

6.b. La distance du point A au plan (BCD) est égale à la hauteur du tétraèdre ABCD relative à la base BCD donc $V=1=\frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times\sqrt{2}$ donc $\mathcal{B}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

7.a. A, B, C et D_k sont coplanaires si et seulement si $D_k(0;0;k)$ appartient au plan (ABC) : x-y+4z-5=0.

$0-0+4k-5=0 \Leftrightarrow k=\frac{5}{4}=1{,}25$. $D_{1,25}$ appartient du plan (ABC), $D_{1,25}$ est le projeté orthogonal de $D_{1,25}$ sur (ABC).

7.b. A est le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{AD_k}$ est colinéaire avec $\vec{n}$.

$\overrightarrow{AD_k}\begin{pmatrix}-2\\-1\\k-1\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ $\frac{-2}{1}\neq\frac{-1}{-1}$ donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Pour toute valeur de k , A n'est pas le projeté orthogonal de D_k sur le plan (ABC).

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés