Exercice 2 — 5 points

Un bassin destiné à l'élevage des truites contient 30000 litres d'eau, régulièrement renouvelée.
Pour vérifier la présence éventuelle de substances polluantes dans le bassin, on procède à des analyses régulières.
On étudie dans les deux parties ci-dessous un cas de contamination de l'eau par une substance polluante à l'aide de deux modèles différents.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : modèle discret

On note v_n le volume, en litre, de la substance polluante présente dans le bassin, n heures après le début du phénomène de pollution.
On a ainsi $v_0=0$.
On admet que pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=0{,}995\,v_n+6$.

1. Calculer v_1 et v_2.

2. Recopier et compléter le programme ci-dessous pour qu'il renvoie le volume en litre de substance polluante présente dans le bassin après n heures.

```
def volume (n):
  v= ...
  for k in range(n):
    v= ....
  return v
```

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 1200$.

4. Justifier que la suite (v_n) converge , et calculer sa limite.

Partie B : modèle continu

On note $v(t)$ le volume, en litre, de la substance polluante présente dans le bassin à l'instant t, en heure.
On admet que la fonction v est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$, et on note v' sa fonction dérivée.
On considère que le phénomène de pollution débute au temps $t=0$; ainsi $v(0)=0$.
On admet que la fonction v est solution de l'équation différentielle : (E) : $y'=-0{,}005\,y+6$.
où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y.

1.a. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0;+\infty[$.
1.b. Montrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$: $v(t)=1200\left(1-e^{-0{,}005t}\right)$.
1.c. Calculer la limite de v en $+\infty$.
1.d. Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. Un taux de substance polluante supérieur à 5 % du volume du bassin nécessite un nettoyage complet.
Selon ce modèle ,le propriétaire devra-t-il procéder à ce nettoyage ?

3. Pour pouvoir dépolluer rapidement le bassin et éviter de lourdes conséquences sur l'élevage, il est préconisé que le volume de la substance polluante ne dépasse pas 50 litres.
Déterminer la valeur exacte de l'instant au-delà duquel le volume de la substance dépasse 50 litres dans le bassin.
En donner la valeur exacte en heure et minute, arrondie à la minute.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A : modèle discret

1. $v_0=0$ et pour tout entier naturel n : $v_{n+1}=0{,}995\,v_n+6$
$v_1=0{,}995\times0+6=6$
$v_2=0{,}995\times6+6=5{,}97+6=11{,}97$

2.

```
def volume (n):
  v= 0
  for k in range(n):
    v= 0.995v+6
  return v
```

3. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence quue pour tout entier naturel n, on a : $v_n\leqslant v_{n+1}\leqslant1200$.
Initialisation
$v_0=0$ et $v_1=6$ donc $v_0\leqslant v_1\leqslant1200$;
La propriété est vérifiée pour $n=0$.
Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $v_n\leqslant v_{n+1}\leqslant1200$ et on doit démontrer que $v_{n+1}\leqslant v_{n+2}\leqslant1200$.
Si $v_n\leqslant v_{n+1}\leqslant1200$ alors $0{,}995\,v_n\leqslant0{,}995\,v_{n+1}\leqslant0{,}995\times1200$ car $0{,}995>0$ et $0{,}995\,v_n+6\leqslant0{,}995\,v_{n+1}+6\leqslant0{,}995\times1200+6$.
Or $0{,}995\,v_n+6=v_{n+1}$ et $0{,}995\,v_{n+1}+6=v_{n+2}$ et $0{,}995\times6+6=1194+6=1200$ donc $v_{n+1}\leqslant v_{n+2}\leqslant1200$.
Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $v_n\leqslant v_{n+1}\leqslant1200$.

4. Pour tout entier naturel n, $v_n\leqslant v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est croissante et $v_n\leqslant1200$ donc la suite (v_n) est majorée par 1200.
Toute suite croissante et majorée est convergente donc la suite (v_n) converge.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=L$.
Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=0{,}995\,v_n+6$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1}=L$ donc $L=0{,}995L+6$

$$L=0{,}995L+6 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}005L=6 \quad\Leftrightarrow\quad L=\frac{6}{0{,}005}=\frac{6000}{5}=1200$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=1200$.

Partie B : modèle continu

1.a. (E) est une équation différentielle du type $y'=a\,y+b$ avec $a=-0{,}005$ et $b=6$.
Les solutions sur $[0;+\infty[$ de cette équation sont les fonctions f_k définies par : $f_k(t)=k\,e^{at}-\frac{b}{a}$ $k\in\mathbb{R}$
sur $[0;+\infty[$ soient $f_k(t)=k\,e^{-0{,}005t}+\frac{6}{0{,}005}=k\,e^{-0{,}005t}+1200$ $k\in\mathbb{R}$.

1.b. On a la condition initiale $f_k(0)=0$.
$f_k(0)=0=k\,e^0+1200 \quad\Leftrightarrow\quad 0=k+1200 \quad\Leftrightarrow\quad k=-1200$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

La solution v de (E) sur $[0;+\infty[$ vérifiant la condition initiale $v(0)=0$ est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $v(t)=-1200\,e^{-0,005t}+1200=1200\left(1-e^{-0,005t}\right)$.

1.c. $\lim\limits_{t\to+\infty}(-0,005t)=-\infty$ et $\lim\limits_{T\to-\infty}e^{T}=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-0,005t}=0$

Conséquence : $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=1200$.

1.d. v est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$v'(t)=-1200\times(-0,005\,e^{-0,005t})=1200\times0,005\,e^{-0,005t}=6\,e^{-0,005t}>0$.

v est croissante sur $[0;+\infty[$.

2. v est croissante sur $[0;+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=1200$ donc pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$ on a : $v(t)\leqslant1200$.

Le volume du bassin est égal à 30000 L. 5 % du volume est égal à $30000\times\dfrac{5}{100}=1500$.

Or 1500 > 1200 donc sur ce modèle le propriétaire ne devra pas procéder au nettoyage complet du bassin.

3. $v(t)=50 \Leftrightarrow 1200\left(1-e^{-0,005t}\right)=50 \Leftrightarrow 1-e^{-0,005t}=\dfrac{50}{1200}=\dfrac{1}{24} \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{24}=\dfrac{23}{24}=e^{-0,005t}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{23}{24}\right)=-0,005t \Leftrightarrow \dfrac{\ln(23)-\ln(24)}{-0,005}=t \Leftrightarrow \dfrac{\ln(24)-\ln(23)}{0,005}=t$

$\dfrac{\ln(24)-\ln(23)}{0,005}\simeq8,51$ or $0,51\times60=30,6$.

8 h 31 min est la valeur arrondie à la minute de l'instant au-delà duquel le volume de la substance dépasse 50 litres dans le bassin.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés