Exercice 3 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Justifier chaque réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On désigne par « musiciens professionnels » l'ensemble des femmes ou hommes pratiquant un instrument de manière professionnelle.

1. Une étude a été réalisée auprès des musiciens professionnels pratiquant différents genres musicaux (Pop, Rap, Rock, Classique, etc).
Cette étude indique que :
. 52 % des musiciens professionnels jouent de la Pop ;
. parmi les musiciens professionnels jouant de la pop, 32 % sont des femmes ;
. 20 % des musiciens professionnels sont des femmes.
On choisit au hasard une personne dans l'ensemble des musiciens professionnels.
On note :
. O l'évènement : « la personne joue de la Pop » ;
. F l'évènement : « la personne est une femme ».

Affirmation 1 :
Si la personne choisie est une femme, alors la probabilité qu'elle joue de la Pop est 0,832.

2. La proportion des musiciens professionnels au sein de la population active dans le secteur de la culture est estimée à 6,2 %.
On prélève au hasard et de manière indépendante un échantillon de 5000 personnes au sein de cette population .
La population considérée est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout échantillon ainsi défini, associe le nombre de musiciens professionnels dans l'échantillon.

Affirmation 2 :
En arrondissant le résultat au dixième, on a : $P(X \leqslant 340) \simeq 0{,}4$.

Affirmation 3 :
En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut affirmer qu'il y a plus de 95 % de chance que sur cet échantillon de 5000 actifs dans le secteur de la culture, le nombre des musiciens professionnels soit strictement entre 230 et 390.

3. Un jeu sur le thème de la culture de la Pop est proposé à 10 personnes dont 4 sont des musiciens professionnels.
Deux équipes de 5 joueurs s'affrontent.
Elles sont chacune constituées de 2 musiciens professionnels et de 3 personnes qui ne le sont pas.

Affirmations 4 :
On peut former ainsi 120 équipes différentes.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

L'énoncé précise : $P(O)=0,52$, $P(F)=0,2$ et $P_O(F)=0,32$.

On doit calculer $P_F(0)$.

$P_F(O)=\dfrac{P(F\cap O)}{P(F)}$ or $P_O(F)=\dfrac{P(F\cap O)}{P(O)}$ donc $P(F\cap O)=P_O(F)\times P()=0,32\times 0,52=0,1664$

$P_F(O)=\dfrac{0,1664}{0,2}=0,832$.

Affirmation 2 : FAUSSE

Preuve

On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

on choisit au hasard une personne parmi la population active de la culture :

succès S : « la personne choisie est un musicien professionnel » $P(S)=0,062$.

On effectue 5000 épreuves indépendantes et la loi de probabilité de la variable X, égale au nombre de succès en 5000 épreuves, est la loi binomiale de paramètres $n=5000$ et $p=0,062$.

En utilisant la calculatrice , on obtient :

$P(X\leqslant 340)\simeq 0,962\neq 0,4$

Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

$E(X)=np=5000\times 0,062=310$

$V(X)=np(1-p)=310\times 0,938=290,78$

$(230<X<390) \Leftrightarrow (230-310<X-310<390-310) \Leftrightarrow (-80<X-E(X)<80) \Leftrightarrow (|X-E(X)|<80)$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

Si $t>0$ alors $P(|X-E(X)|\geqslant t)\leqslant\dfrac{V(X)}{t^2}$

Pour $t=80$ on obtient : $P(|X-E(X)|\geqslant 80)\leqslant\dfrac{290,78}{6400}$

L'évènement : $(|X-E(X)|<80)$ est l'évènement contraire de $(|X-E(X)|\geqslant 80)$.

$P(|X-E(X)|<80)=1-P(|X-E(X)|\leqslant 80)\geqslant 1-\dfrac{290,78}{6400}$.

$\dfrac{290,78}{6400}\simeq 0,0454$ donc $\dfrac{290,78}{6400}\leqslant 0,05$ et $1-\dfrac{290,78}{6400}\geqslant 1-0,05=0,95$ et $P(|X-E(X)|\leqslant 80)\geqslant 0,95$.

Il y a donc plus de 95 % de chance que, sur cet échantillon de 5000 actifs dans le secteur de la culture, le nombre de musiciens professionnels soit strictement compris entre 230 et 390.

Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

Pour construire une équipe, il faut choisir au hasard et simultanément 2 musiciens parmi les 4 et choisir simultanément 3 personnes parmi les 6 qui ne sont pas musiciens.

Le nombre d'équipes différentes est :

$\binom{4}{2}\times\binom{6}{3}=\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{6!}{3!3!}=\dfrac{3\times 4}{2}\times\dfrac{4\times 5\times 6}{2\times 3}=6\times 20=120$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés