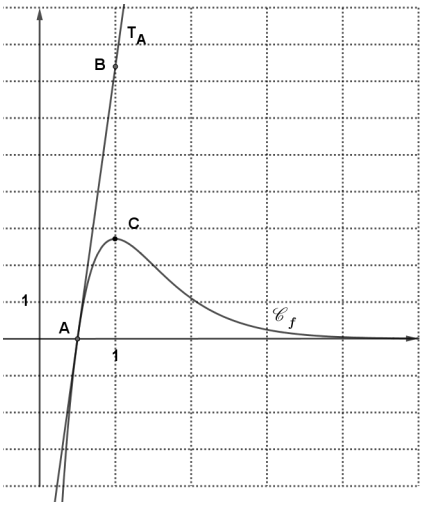
Exercice 4 — 6 points

Partie A

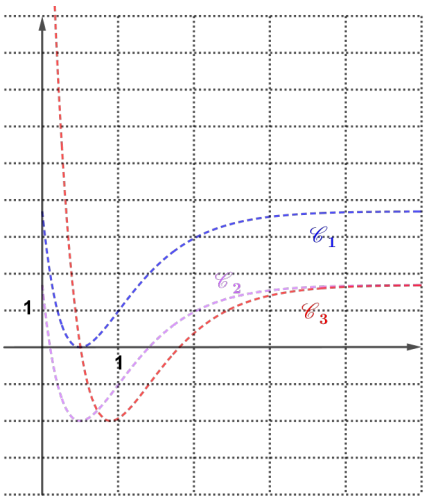
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ dont on donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.
On note f' sa fonction dérivée.
On précise que :

- la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C d'abscisse 1 ;
- La tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ passe par le point $B(1;e^2)$.



1. À l'aide du graphique ci-dessus :
1.a. Donner $f'(1)$.
1.b. Donner la solution de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[0;3]$.
2. Déterminer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

3. Parmi les trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ci-dessous deux représentent des primitives de la fonction f. Indiquer lesquelles et justifier.



Partie B

Un industriel doit créer un logo représentant la forme ci-après (fig 1).
La dimension de 0,3 cm indiquée sur la figure est une contrainte imposée par le client.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

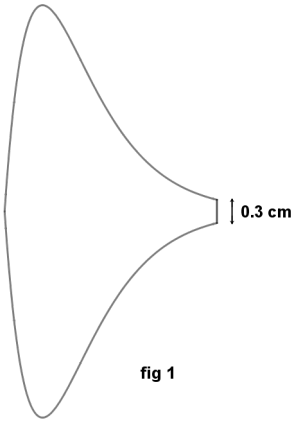


fig 1

L'industriel choisit de modéliser le contour de ce logo à l'aide d'une portion de la courbe de la fonction f vue en **partie A**, et de l'image de cette portion par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, sur un intervalle $[0;\alpha]$. Le nombre α est un réel supérieur à 1 que l'on déterminera dans cette partie.
L'ensemble est est représenté graphiquement dans un repère orthonormé (fig 2) d'unité 1 cm.

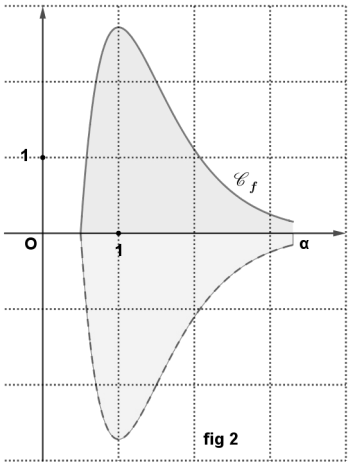


fig 2

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=(2x-1)e^{-2x+3}$.

1.a. Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$: $f(x)=e^2\times\dfrac{2x-1}{e^{2x-1}}$.

1.b. En déduire la limite de f en $+\infty$. (on pourra poser X=2x-1)

2.a. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f'(x)=(-4x+4)e^{-2x+3}$.
2.b. Construire le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

3. Justifier que la contrainte imposée par le client se traduit par l'égalité $f(\alpha)=0{,}15$.
Montrer qu'il existe une unique valeur de α dans l'intervalle $[1;+\infty[$ qui permette de vérifier cette égalité. En donner une valeur approchée au dixième.

Partie C
On fabrique un porte-clé en découpant une plaque d'acier suivant la forme du logo représenté par la surface grisée en figure 2 de la **partie B.**
On précise que cette plaque a une épaisseur de 0,2 cm.

1. On considère : $I=\displaystyle\int_{0,5}^{3,3} f(x)\,dx$.
À l'aide d'une intégration par parties , montrer que l'intégrale I arrondie au dixième est égale à 3,6.

2. On précise que le volume du porte-clé est égal à : *Aire du logo* $\times$ *épaisseur de la plaque.*
Déterminer le volume du porte-clé en cm^3, arrondi au dixième.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

1.a. $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point C d'abscisse 1 donc $f'(1)=0$.

1.b. $\mathscr{C}_f$ n'a qu'un seul d'intersection avec l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0;3]$, c'est le point A.

Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle [0:3] : $x_A=\frac{1}{2}$.

2. $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A passant par A et B.

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{e^2-0}{1-0,5}=\frac{e^2}{0,5}=2e^2$.

3. Le signe de la fonction f donne les variations d'une primitive de f.
f est négative sur [0;0,5[et positive sur $]0,5;5]$ donc toutes primitives de f sont décroissantes sur [0;0,5] et croissante sur [0,5;5].
$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ vérifient ces conditions mais pas $\mathscr{C}_3$
$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les courbes représentatives de deux primitives de f.

Partie B

1.a. $x\in[0;+\infty[$ $f(x)=(2x-1)e^{-2x+3}$

$e^{-2x+3}=e^{-2x+1}\times e^2=\frac{e^2}{e^{-2x+1}}$ et $f(x)=e^2\times\frac{2x-1}{e^{2x-1}}$

1.b. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^x}=0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{e^{2x-1}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

1.c. $u(x)=2x-1$ $u'(x)=2$
$v(x)=e^{-2x+3}$ $v'(x)=-2e^{-2x+3}$
$f'(x)=2e^{-2x+3}+(2x-1)\times(-2e^{-2x+3})=2e^{-2x+3}+(-4x+2)e^{-2x+3}$
$f'(x)=(-4x+4)e^{-2x+3}$

1.d. Pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$, $e^{-2x+3}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de (-4x+4) sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
$-4x+4=0 \Leftrightarrow x=1$
Si $0\leqslant x<1$ alors $f'(x)>0$
Si $1<x$ alors $f'(x)<0$
Tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	
f(x)	$-e^3$	↗	e	↘	0

$f(0)=-1\times e^3=-e^3$ $f(1)=1\times e^1=e$.

3. La courbe symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_g$ telle que pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$: $g(x)=-f(x)$.
f est positive sur $[0;+\infty[$ donc g est négative sur $[0;+\infty[$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Si on considère les points : $M_1(x;f(x))$ et $M_2(x;g(x))$ pour $x\in[0;+\infty[$.

$\overrightarrow{M_2M_1}\begin{pmatrix}0\\f(x)-g(x)\end{pmatrix}$ $f(x)-g(x)=2f(x)$ et $M_2M_1=2f(x)$.

Pour la valeur $x=\alpha$ alors $M_1M_2=0{,}3=2f(\alpha)$ donc $f(\alpha)=0{,}15$.

f est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ à valeurs dans $]0;e]$, $0{,}15\in]0;e]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un unique réel $\alpha\in[1;+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0{,}15$.

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\alpha=3{,}3$ valeur arrondie au dixième.

Partie C

1. $\displaystyle\int_{0,5}^{3,3}(2x-1)e^{-2x+3}dx$

$u(x)=2x-1$ $\quad u'(x)=2$

$v'(x)=e^{-2x+3}$ $\quad v(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x+3}$

u et v sont dérivables et u' et v' sont continues sur [0,5;3,3].

On utilise la formule d'intégration par parties.

$$I=\left[-\frac{1}{2}(2x-1)e^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3}+\int_{0,5}^{3,3}e^{-2x+3}dx$$

$$I=-2{,}8e^{-3,6}+\left[-\frac{1}{2}e^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3}=-2{,}8e^{-3,6}-0{,}5e^{-3,6}+0{,}5e^{2}$$

$I=0{,}5e^{2}-3{,}3e^{-3,6}\simeq 3{,}604$ $\quad I=3{,}6$ valeur approchée au dixième.

2. I est l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses et les droites d'équation x=0,5 et x=3,3. Donc I est l'aire en cm^2 de la partie du logo située au-dessus de l'axe des abscisses.

L'axe des abscisses est un axe de symétrie du logo donc I est aussi l'aire en cm^2 de la partie du logo située en dessous de l'axe des abscisses.

Donc l'aire du logo en cm^2 est égale à $2I$.

$2I=7{,}2$ cm^2 valeur approchée au dixième (car $2\times3{,}604=7{,}208$).

L'épaisseur du logo est 0,2 cm

Le volume du logo est égal à : $2I\times0{,}2=0{,}4I$ cm^3 ($3{,}604\times4=1{,}3416$)

1,3 cm^3 est une valeur arrondie au dixième du volume du logo.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés