

Exercice 1

5 points

Une école de surf travaille avec des planches en mousse pour les cours débutants, et d'autres en résine pour les cours de perfectionnement. Les planches en mousse représentent 80 % de stock de l'école.

La gérante observe qu'après chaque saison.

- . 75 % des planches en mousse sont en bon état et réutilisables la saison suivante. Les autres sont recyclées (et donc non réutilisables) ;
 - . 60 % des planches en résine sont en bon état, les autres sont consolidées, soit recyclées.
- Après une saison, on choisit une planche au hasard et on s'intéresse aux événements suivants :
- . M : « La planche est en mousse » ;
 - . B : « La planche est en bon état » ;
 - . R : « La planche sera recyclée » ;
 - . C : « La planche sera consolidée ».

Partie A

1. Recopier et compléter sur la copie l'arbre pondéré ci-dessous avec les données de l'énoncé.
Il sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2. On sait que $P(\bar{M} \cap R) = 0,05$.
 - 2.a. Interpréter cette égalité dans le contexte de l'exercice.
 - 2.b. On a choisi une planche en résine. Démontrer que la probabilité que cette planche soit consolidée pour la saison suivante est 0,15.
3. La gérante affirme qu'après une saison au moins $\frac{3}{4}$ des planches sont en bon état.
A-t-elle raison ?

Partie B

La gérante du club de surf envisage de proposer à certains clients une remise pour la saison suivante.

Pour cela, elle imagine le jeu suivant qui sera proposé à chaque client :

Une urne contient 5 boules noires et un nombre n de boules rouges.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Le client tire simultanément deux boules dans l'urne.

Si les deux boules sont de même couleur, le client gagne une remise, sinon, il perd le jeu et n'obtient pas de remise.

1. Justifier que la probabilité p de gagner une remise est :

$$p = \frac{\binom{5}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}}$$

2. En déduire que la probabilité p peut s'écrire : $p = \frac{20 + n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

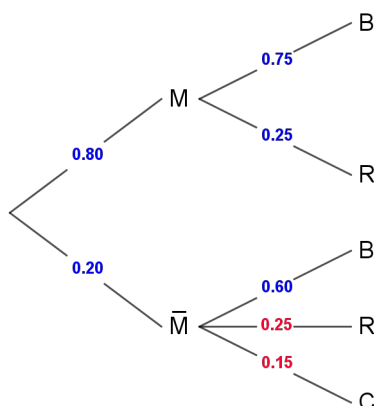
3. La gérante souhaite s'assurer que la probabilité de gagner est inférieure à $\frac{1}{2}$.

Déterminer pour cela l'ensemble des valeurs possibles du nombre n de boules rouges qu'elle peut mettre dans l'urne.

CORRECTION

Parte A

1. $\bar{M}$ est l'évènement : « La planche est en résine ».
 $P(M)=0,80$ $P(\bar{M})=1-0,80=0,20$ $P_M(B)=0,75$ donc $P_M(C)=1-0,75=0,25$ $P_{\bar{M}}(B)=0,6$
 On complète l'arbre pondéré (les résultats notés en rouge seront démontrés dans les questions suivantes).



2.a. $P(\bar{M} \cap R) = 0,05 = P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(R) \Leftrightarrow 0,05 = 0,20 \times P_{\bar{M}}(R) \Leftrightarrow P_{\bar{M}}(R) = \frac{0,05}{0,20} = 0,25$

En fin de saison, 5 % des planches sont en résine et sont recyclées.
 25 % des planches en résine sont recyclées.

2.b. $P_{\bar{M}}(B) + P_{\bar{M}}(R) + P_{\bar{M}}(C) = 1 \Leftrightarrow 0,60 + 0,25 + P_{\bar{M}}(C) = 1 \Leftrightarrow P_{\bar{M}}(C) = 1 - 0,60 - 0,25 = 0,15$.

3. En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :
 $P(B) = P(M \cap B) + P(\bar{M} \cap B) = 0,8 \times 0,75 + 0,2 \times 0,6 = 0,6 + 0,12 = 0,72 < 0,75$.
 La gérante n'a pas raison.

Partie B

1. On suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Le nombre total de boules dans l'urne est : $n+5$.

Le nombre de tirages en prenant simultanément 2 boules de l'urne est : $\binom{n+5}{2}$.

Le nombre de tirages en prenant simultanément 2 boules noires de l'urne est : $\binom{5}{2}$.

Le nombre de tirages en prenant simultanément 2 boules rouges de l'urne est : $\binom{n}{2}$.

$\binom{n}{2} + \binom{5}{2}$ est le nombre de tirages faisant gagner une remise au client donc :

$$p = \frac{\binom{5}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}}$$

2. $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ $\binom{n+5}{2} = \frac{(n+5)(n+4)}{2}$

$$p = \frac{20 + n(n-1)}{2} \times \frac{2}{(n+5)(n+4)} = \frac{20 + n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

3. $p = \frac{20 + n(n-1)}{(n+5)(n+4)} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{20 + n(n-1)}{(n+5)(n+4)} - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{40 + 2n(n-1) - (n+5)(n+4)}{2(n+5)(n+4)} < 0$

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 donc $2(n+5)(n+4) > 0$

Il suffit de résoudre :

$$40+2n(n-1)-(n+5)(n+4)<0 \Leftrightarrow 40+2n^2-2n-(n^2-9n+20)<0 \Leftrightarrow n^2-11n+20<0$$

On considère le trinôme $T(x)=x^2-11x+20$ et on détermine son signe sur $\mathbb{R}$.

$$\Delta=(-11)^2-4\times 1\times 20=121-80=41$$

$$x_1=\frac{11-\sqrt{41}}{2}\simeq 2,3 \quad x_2=\frac{11+\sqrt{41}}{2}\simeq 8,6$$

On donne le signe de $T(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
T(x)	+	0	-	0	+

Les solutions sont les entiers naturels compris entre x_1 et x_2 donc **3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8**