

Exercice 2

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

Affirmation 1 :

La limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$.

Affirmation 2 :

La fonction g est convexe sur l'intervalle $] -2; +\infty[$.

3. **Affirmation 3 :**

Une intégration par parties permet d'obtenir : $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = -\pi$.

4. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - 5$ et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{3}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}$.

Affirmation 4 :

La fonction h est la solution de (E) qui vaut 1 en 0.

5. On considère la fonction mystère définie ci-dessous en Python :

```
def mystere(n):  
    f=1  
    for k in range(1,n+1):  
        f=f*k  
    return f
```

Affirmation 5 :

Le nombre renvoyé lors de l'exécution de `mystere(5)` est 120

CORRECTION

1. Affirmation 1 : FAUSSE

Preuve

$$f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \quad \text{or} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

On obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x \quad g''(x) = 1 \times e^x + (x+1) \times e^x = (x+2)e^x$$

Pour tout réel de de l'intervalle $[-2; +\infty[$ $g''(x) \geq 0$ et g est convexe sur $[0; +\infty[$.

3. Affirmation 3 : FAUSSE

Preuve

$$u(x) = x \quad u'(x) = 1 \quad v'(x) = \sin x \quad v(x) = -\cos x$$

u et v sont dérivables sur $[0; \pi]$ et u' et v' sont continues sur $[0; \pi]$.

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = [-x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) \, dx = -\pi \times (-1) - 0 - [-\sin x]_0^\pi = \pi$$

Il n'est pas nécessaire d'effectuer une intégration par parties pour conclure, il suffit d'utiliser la positivité de l'intégrale.

Si $x \in [0; \pi]$ alors $x \sin x \geq 0$ et $\int_0^\pi x \sin x \, dx \geq 0$.

4. Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

Les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = k e^{2x} + \frac{5}{2} \quad \text{où } k \text{ est un nombre réel.}$$

$$f_k(0) = 1 \Leftrightarrow k \times e^0 + \frac{5}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$$

h est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $h(0) = 1$.

5. Affirmation 5 : VRAIE

Preuve

L'instruction : for k in range(1;n+1) successivement les valeurs 1 ; 2 ; 3 4 et 5 à k

L'algorithme renvoie : $1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5! = 120$