

Exercice 3

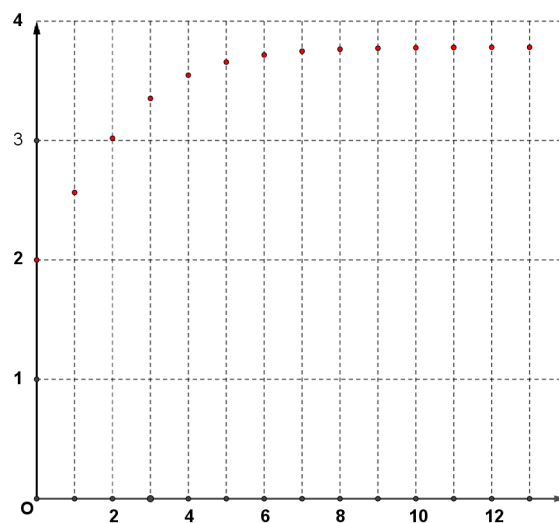
5 points

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(3x^2 + 1)$
On admet que la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :
 $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \ln(3u_n^2 + 1)$.

1. Calculer u_1
2. La suite (u_n) est représentée ci-dessous. Émettre des conjectures sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .



3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
4. En déduire que la suite est convergente.

Partie B

On note L la limite de la suite (u_n) .
Le but de cette partie est de trouver une valeur approchée de la limite L .
On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(3x^2 + 1) - x$.

1. On note g' la fonction dérivée de la fonction g .
Démontrer que pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{-3x^2 + 6x - 1}{3x^2 + 1}$.
2. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur $[2; 4]$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2; 4]$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Justifier que $L = \alpha$.

CORRECTION

Partie A

- $u_1 = \ln(3 \times 2^2 + 1) = \ln(13) \approx 2,565$ à 10^{-3} près.
- Par lecture graphique : (u_n) est croissante et majorée par 4 donc convergente.
- On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

Initialisation

$u_0 = 2$ et $u_1 \approx 2,565$ donc $2 \leq u_1 \leq u_2 \leq 4$.

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ et on doit démontrer que $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$.

Si $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ alors $f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$ (car f est croissante sur $[0; +\infty[$).

Or $f(2) = \ln(13) \approx 2,565 \geq 2$ et $f(4) = \ln(3 \times 4^2 + 1) = \ln(49) \approx 3,892 \leq 4$ et $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ donc $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$.

Conclusion

Le principe de récurrence, nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , on a : $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

- Pour tout entier naturel n , on a : $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante et on a : $u_n \leq 4$ donc la suite (u_n) est majorée par 4.
Toute suite croissante et majorée est convergente donc la suite (u_n) converge.

Partie B

- $x \in [0; +\infty[$ $g(x) = \ln(3x^2 + 1) - x$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u} \quad u(x) = 3x^2 + 1 \quad u'(x) = 6x \quad (\ln(3x^2 + 1))' = \frac{6x}{3x^2 + 1}$$

$$g'(x) = \frac{6x}{3x^2 + 1} - 1 = \frac{6x - 3x^2 - 1}{3x^2 + 1} = \frac{-3x^2 + 6x - 1}{3x^2 + 1}$$

- Pour tout $x \in [0; +\infty[$ on a : $3x^2 + 1 > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $T(x) = -3x^2 + 6x - 1$.

$$\Delta = 6^2 - 4 \times (-3) \times (-1) = 36 - 12 = 24 > 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{6}}{2 \times (-3)} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,184 \quad x_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{6}}{-6} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 1,816$$

On donne les variations sous la forme d'un tableau.

x	0	x_1	x_2	2	4
T(x)	-	0	+	0	-
g'(x)	-	0	+	0	-
g(x)					

g est décroissante sur $[2; 4]$.

3. g est continue et strictement décroissante sur $[2; 4]$ à valeurs dans $[g(4); g(2)]$.

$$g(4) = \ln(3 \times 4^2 + 1) - 4 = \ln(49) - 4 \simeq 3,892 - 4 = -0,108 < 0$$

$$g(2) = \ln(3 \times 2^2 + 1) - 2 = \ln(13) - 2 \simeq 2,565 - 2 = 0,565 > 0$$

$$\text{donc } 0 \in [g(4); g(2)].$$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un unique nombre réel α appartenant à $[2; 4]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

En utilisant la calculatrice on obtient : $\alpha \simeq 3,78$ à 10^{-2} près.

4. On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$ et pour tout entier naturel n : $2 \leq u_n \leq 4$.

$$\text{Donc } 2 \leq L \leq 4 \text{ et } L = f(L) \Leftrightarrow f(L) - L = 0 \Leftrightarrow g(L) = 0.$$

α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $[2; 4]$ donc $L = \alpha$.