

Exercice 4

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les points $A(1;2;-1)$, $B(0;3;2)$, $C(-2;4;0)$ et $D(8;2;-11)$.

1.a. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.

1.b. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

1.c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $5x+8y-z-22=0$

1.d. Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (ABC).

2.a. On considère la droite Δ , orthogonale au plan (ABC) et passant par D.

Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est : $\begin{cases} x=8+5t \\ y=2+8t \\ z=-11-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2.b. On appelle E le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

Démontrer que le point E a pour coordonnées $\left(\frac{11}{2}; -2; -\frac{21}{2}\right)$.

2.c. En déduire la valeur exacte de la longueur DE, distance du point D au plan (ABC).

3. On note H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (BC) est : $\begin{cases} x=-2k \\ y=3+k \\ z=2-2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats suivants :

entrée1: $(-2/3-1)*(-2)+(10/3-2)*1+(4/3-(-1))*(-2)$ Sortie 1: $\rightarrow 0$
Entrée 2: RésoudreSystème$\begin{cases} -2k=-2/3, 3+k=10/3, 2-2k=4/3 \end{cases}$ Sortie 2: $\rightarrow k=1/3$
Entrée 3: RacineCarrée$(-2/3-1)^2+(10/3-2)^2+(4/3+1)^2$ Sortie 3: RacineCarrée(10)
Entrée 4: RacineCarrée$(-2-0)^2+(4-3)^2+(0-2)^2$ Sortie 4: $\rightarrow 3$

3.a. En utilisant les deux premiers résultats obtenus avec la feuille de calculs ci-dessus, justifier que le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

3.b. En exploitant les autres résultats obtenus avec la feuille de calculs ci-dessus déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.

CORRECTION

1.a. $A(1;2;-1)$ $B(0;3;2)$ $C(-2;4;0)$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -\lambda \\ 2 = \lambda \\ 1 = 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Il n'existe pas de nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés et **les points A, B et C définissent un plan.**

1.b. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC) par exemples $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 \times (-1) + 8 \times 1 + (-1) \times 3 = -5 + 8 - 3 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times (-3) + 8 \times 2 + (-1) \times 1 = -15 + 16 - 1 = 0$$

donc **$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).**

1.c. (ABC) est le plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par $A(1;2;-1)$.

$$(ABC): 5x + 8y - z + d = 0$$

$$5 \times 1 + 8 \times 2 - 1 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow 5 + 16 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -22$$

$$(ABC): 5x + 8y - z - 22 = 0$$

1.d. $D(8;2;-11)$

$$5 \times 8 + 8 \times 2 - 1 \times (-11) = 40 + 16 + 11 - 22 = 45 \neq 0$$

Le point D n'appartient pas au plan (ABC).

2.a. Δ est la droite passant par $D(8;2;-11)$ et de vecteur directeur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On obtient pour représentation paramétrique de Δ : $\begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 2 + 8t \\ z = -11 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2.b. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection E du plan (ABC) et de la droite Δ , on résout

$$\text{le système : } \begin{cases} 5x + 8y - z - 22 = 0 \\ x = 8 + 5t \\ y = 2 + 8t \\ z = -11 - t \end{cases} \quad \text{On obtient : } 5 \times (8 + 5t) + 8 \times (2 + 8t) - (-11 - t) - 22 = 0 \Leftrightarrow$$

$$40 + 25t + 16 + 64t + 11 + t - 22 = 0 \Leftrightarrow 90t + 45 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{90}{90} = -1$$

$$x_E = 8 + 5 \times (-1) = 3 \quad y_E = 2 + 8 \times (-1) = -6 \quad z_E = -11 - (-1) = -10 \quad E \left(3; -6; -10 \right)$$

2.c. $D(8;2;-11)$ $E \left(\frac{11}{2}; -2; -\frac{21}{2} \right)$

$$DE^2 = \left(\frac{11}{2} - 8 \right)^2 + (-2 - 2)^2 + \left(-\frac{21}{2} + 11 \right)^2 = \frac{25}{4} + 16 + \frac{90}{4} = \frac{141}{2} \quad DE = \frac{\sqrt{141}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$3.a. \quad H \left(-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}; \frac{4}{3} \right) \quad \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} - 1 \\ \frac{10}{3} - 2 \\ \frac{4}{3} + 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -2 - 0 \\ 4 - 3 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Le premier résultat de la feuille de calculs donne $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Le deuxième résultat donne le point H appartient à (BC).

Conséquence H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

3.b. Le troisième résultat donne la valeur de AH : $\sqrt{10}$.

Le quatrième résultat donne la valeur de BC : 3

AH est la hauteur du triangle ABC issue de A .

L'aire du triangle ABC est égale à : $\frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{10} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

Pour le tétraèdre $ABCD$ la hauteur relative à la base ABC est $DE = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

On obtient le volume du tétraèdre $ABCD$.

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} = \frac{3 \times 10}{4} = \frac{15}{2}$$