Exercice 1 — 5 points

Dans cet exercice, on s'intéresse à la part des filles et des garçons s'orientant vers des études scientifiques après avoir suivi un enseignement de spécialité mathématiques en terminale.
Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans une académie donnée, la population est constituée d'élèves de terminale ayant choisi la spécialité mathématiques. On souhaite analyser leurs choix d'orientation , notamment vers les études supérieures en ingénierie.
Les répartitions sont les suivantes :
. 40 % sont des filles ; 60 % sont des garçons ;
. parmi les filles, 33,75 % envisagent des études d'ingénieur ;
. parmi les garçons, 54,25 % envisagent des études d'ingénieur.
On interroge uniformément au hasard un élève de terminale ayant choisi la spécialité mathématiques de cette académie et on considère les évènements suivants :
. F : « L'élève est une fille » ;
. I : « L'élève envisage des étude d'ingénieur ».
Pour un évènement E quelconque, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire et P(E) la probabilité de E.

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que l'élève choisie au hasard soit une fille envisageant des études d'ingénieur.

3. Démontrer que la probabilité que l'élève choisi au hasard envisage des études d'ingénieur est égale à 0,4605.

4. L'élève interrogé envisage des étude d'ingénieur. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une fille ?
Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

Partie B

Dans cette partie, on considère un entier naturel n non nul.
On interroge uniformément au hasard dans cette académie n filles en terminale, qu'elles suivent ou non la spécialité mathématiques. On suppose que ce nombre de filles est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à des tirages indépendants avec remise.
On note X la variable aléatoire qui modélise le nombre de filles envisageant de devenir ingénieure qu'elle suive ou non la spécialité mathématiques.
On admet que la probabilité qu'une fille souhaite devenir ingénieur est égale à 0,15.

1.a. Justifier que X suit une loi binomiale.
1.b. Exprimer en fonction de n l'espérance de X.

2. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit nombre de lycéennes qu'il faut interroger pour que la probabilité de l'évènement : « Au moins une fille parmi celles interrogées souhaite devenir ingénieure » soit supérieure ou égale à 0,99.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n = 29 filles.
Déterminer la probabilité qu'au moins le quart des filles interrogées souhaite devenir ingénieure.
Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Partie C

On s'intéresse à dix académies de tailles comparables numérotées de 1 à 10.
On considère X_1 la variable aléatoire qui à un échantillon de 1500 lycéennes de l'académie n°1, associe le nombre de filles envisageant de devenir ingénieure.
On définit de la même manière les variables aléatoires $X_2, \ldots, X_{10}$ pour les académies 2 à 10.
On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ sont indépendantes entre elles et qu'elles admettent la même espérance égale à 225 et la même variance égale à 191,25.
On considère la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$.

1. Que représente la variable aléatoire S pour les 15000 lycéennes interrogées sur l'ensemble des dix académies ?

2. Calculer l'espérance et la variance de S.

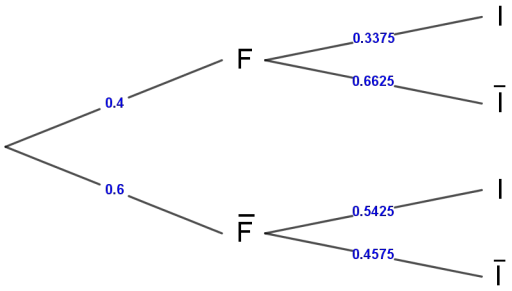
3. On considère l'ensemble des 15000 lycéennes formé par les échantillons issus des dix académies. Argumenter pour dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse ou si on ne peut pas savoir : « La probabilité que le nombre total de filles envisageant de devenir ingénieure soit strictement compris entre 2000 et 2500 est supérieure à 0,95 ».

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

1. $\overline{F}$: « L'élève est un garçon ».
$P(F)=0,4 \quad P(\overline{F})1-0,4=0,6$
$P_F(I)=0,3375 \quad P_F(\overline{I})=1-0,3375=0,6625$
$P_{\overline{F}}(I)=0,5425 \quad P_{\overline{F}}(\overline{I})=1+0,5425=0,4575$
On obtient pour arbre pondéré



2. $P(F\cap I)=P(F)\times P_F(I)=0,4\times 0,3375=0,135$

3. En utilisant la formule des probabilités totales
$P(I)=P(F\cap I)+P(\overline{F}\cap I)=0,4\times 0,3375+0,6\times 0,5425=0,135+0,3255=0,4625$

4. $P_I(F)=\dfrac{P(I\cap F)}{P(I)}=\dfrac{0,135}{0,4605}=0,293$ à 10^{-3} près.

Partie B

1.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On interroge au hasard une fille en terminale de l'académie.
Succès : « cette fille souhaite devenir ingénieure » la probabilité de succès est égale à 0,15.
On effectue n épreuves indépendantes, la variable aléatoire X qui donne le nombres de succès en n épreuves suit la loi binomiale de paramètres n et p=0,15.

1.b. $E(X)=np=0,15n$

2. Soit A l'évènement : « Au moins une fille parmi celle interrogées souhaite devenir ingénieure ».
$\overline{A}$ est l'évènement : « Aucune fille parmi les filles interrogées souhaite devenir ingénieure ».
$P(\overline{A})=(1-0,15)^n=0,85^n$ et $P(A)=1-0,85^n$.
$P(A)\geqslant 0,99 \Leftrightarrow 1-0,85^n\geqslant 0,99 \Leftrightarrow 1-0,99\geqslant 0,85^n \Leftrightarrow 0,01\geqslant 0,85^n \Leftrightarrow \ln(0,01)\geqslant \ln(0,85^n)$
(car la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$).
$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,85)}\leqslant n \Leftrightarrow 29\leqslant n$ car $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,85)}\simeq 28,3$ et n est un entier naturel.
Il faut interroger 29 filles .

3. $29=4\times 7+1$ donc l'évènement : « au moins le quart des filles interrogées souhaitent devenir ingénieure » équivaut à l'évènement $(X\geqslant 8)$.
En utilisant la calculatrice : $P(X\geqslant 8)=0,059$ à 10^{-3} près.

Partie C

1. S est le nombre des filles interrogées dans les dix académies souhaitant devenir ingénieures.

2. $E(S)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_{10})=10\times 225=2250$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$V(S)=V(X_1)+V(X_2)+\ldots+V(X_{10})$ car les dix variables aléatoires X_1, …, X_{10} sont indépendantes.
$V(S)=10\times 191{,}25=1912{,}5$

3. $2000<S<2500 \Leftrightarrow 2000-E(S)<S-E(S)<2500-E(S) \Leftrightarrow -250<S-E(S)<250$
$\Leftrightarrow |S-E(S)|<250$.
On considère l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$t>0 \quad P(|X-E(X)|\geqslant t)\leqslant \dfrac{V(X)}{t^2}$.
Pour $X=S$ et $t=250$ $P(|S-E(S)|\geqslant 250)\leqslant \dfrac{1912{,}5}{250^2}=\dfrac{1912{,}5}{62500}$.
$(2000<S<2500)$ est l'évènement contraire de $(|S-E(S)|\geqslant 250)$
$1-P(2000<S<2500)\leqslant \dfrac{1912{,}5}{62500} \Leftrightarrow 1-\dfrac{1921{,}5}{62500}\leqslant P(2000<S<2500)$
Or $1-\dfrac{1921{,}5}{62500}=\dfrac{60587{,}5}{62500}\simeq 0{,}969$ donc $0{,}95<P(2000<S<2500)$ .ingénieure
Donc la probabilité que le nombre de filles envisageant de devenir soit strictement compris entre 2000 et 2500 est supérieure à 0,95.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés