Exercice 2 — 5 points

Dans cet exercice les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout $x\in[4;10]$ par $f(x)=\ln(8x^3-1)$.
On admet que la fonction f est dérivable sur [4;10] et on note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer pour tout $x\in[4;10]$, on a : $f'(x)=\dfrac{24x^2}{(2x-1)(4x^2+2x+1)}$

2.a. En déduire que f est croissante sur [4;10].
2.b. Montrer que, pour tout $x\in[4;10]$, on a : $4\leqslant f(x)\leqslant 10$;

3. On définit la fonction g (définie pour tout $x\in[4;10]$) par $g(x)=f(x)-x$.
On admet que g est strictement décroissante sur son ensemble de définition.
3.a. Montrer que, sur l'intervalle [4;10], l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α.
3.b. Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de α.

Parie B

On admet qu'on peut définir la suite (u_n) par $u_0=5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1}=f(u_n)$, où f est la fonction étudiée à la partie A.

1. Donner une valeur approchée de u_1 à 10^{-1} près.

2.a. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $4\leqslant n_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 10$.
2.b. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. Montrer que la suite (u_n) converge vers le nombre α, défini dans la partie A.

Partie C

Dans cette partie, on admet que $8{,}4\leqslant\alpha\leqslant 8{,}5$.
On a créé, en langage Python, la fonction alpha suivante.
On précise qu'en langage Python, l'instruction log correspond à ln.

```
def f(x):
    return log(8*x**3-1)

def alpha(a):
    n=0
    u=5
    while u<a:
        u=f(u)
        n=n+1
    return n
```

1. On admet que alpha(8,499) renvoie la valeur 11.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Un utilisateur exécute alpha(8,6).
Expliquer pourquoi aucune valeur n'est alors renvoyée.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

1. $x\in[4;10]$ $\quad f(x)=\ln(8x^3-1)$

$8x^3-1>0 \iff 8x^3>1 \iff x^3>\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3 \iff x>\frac{1}{2}$

Car la fonction racine cubique est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc la fonction f est définie sur [4;10].

$u(x)=8x^3-1$ $\quad u'(x)=8\times(3x^2)=24x^2$

$(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$ $\quad f'(x)=\frac{24x^2}{8x^3-1}$

Or $(2x-1)(4x^2+2x+1)=8x^3+4x^2+2x-4x^2-2x-1=8x^3-1$

Donc $f'(x)=\frac{24x^2}{(2x-1)(4x^2+2x+1)}$

2.a. $T(x)=4x^2+2x+1$ $\quad \Delta=4-4\times1\times4=-12$ donc Pour tout nombre réel x on a : $T(x)>0$.
Si $x\geqslant4$ alors $24x^2>0$ et $2x-1>0$ et $4x^2+2x+1>0$ donc $f'(x)>0$.
f est strictement croissante sur [4;10].

2.b. $f(4)=\ln(8\times4^3-1)=\ln(511)\simeq6,24\geqslant4$
$f(10)=\ln(8\times10^3-1)=\ln(7999)\simeq8,99\leqslant10$
f est croissante sur [4;10] donc si $4\leqslant x\leqslant10$ alors $f(4)\leqslant f(x)\leqslant f(10)$.
Or $f(4)\geqslant4$ et $f(10)\leqslant10$ donc $4\leqslant f(x)\leqslant10$.

3. $x\in[4;10]$ $\quad g(x)=f(x)-x$ g est strictement décroissante sur [4;10].

3.a. $g(4)=f(4)-4\simeq2,24>0$ et $g(10)=f(10)-10\simeq-1,01<0$
g est continue et strictement décroissante sur [4;10] à valeurs dans [g(10);g(4)], $0\in[g(10);g(4)]$, donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à [4;10].

3.b. $g(\alpha)=0$, en utilisant la calculatrice, on obtient : $8,499\leqslant\alpha\leqslant8,5$.

Partie B

1. $u_0=5$ et $u_1=\ln(8\times5^3-1)=\ln(999)\simeq6,9$ à 10^{-1} près.

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que tout entier naturel n, on a :
$4\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant10$

Initialisation

$u_0=5$ $\quad u_1\simeq6,9$ à 10^{-1} près donc $4\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant10$.

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $4\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant10$ et on doit démontrer que $4\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant10$.

Si $4\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant10$ alors $f(4)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(10)$ car f est croissante sur [4;10].

Or $f(4)\simeq6,2\geqslant4$; $f(u_n)=u_{n+1}$; $f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $f(10)\simeq8,99\leqslant10$

donc $4\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant10$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a :
$4\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant10$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

2.b. Pour entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante et on a : $u_n \leqslant 10$
donc la suite (u_n) est majorée par 10.
Toute suite croissante et majorée est convergente donc la suite (u_n) converge.

3. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ et $4 \leqslant L \leqslant 10$.
Pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $L = f(L)$ et $f(L) - L = g(L) = 0$.
L'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ dans [4;10] est α.
Donc $L = \alpha$.

Partie C

1. La plus petite valeur de n pour laquelle $0{,}499 \leqslant u_n$ est $n = 11$.

2. Tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égal à 8,5.
Donc il n'existe pas de valeur de n pour laquelle $0{,}86 \leqslant u_n$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés