Exercice 3 — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points :
$A(-1;1;1)$ $B(1;-6;-1)$ $C(-5;2;3)$

1.a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1.b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\-2\\13\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

1.c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne : $6x-2y+13z-5=0$.

2. On considère le plan (P) d'équation cartésienne : $8x-2y-4z+18=0$.
On admet que deux plans sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.
Démontrer que les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.

3. Soit (d) une droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases}x=-4+t\\y=-11+6t\\z=2-t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$
Démontrer que la droite (d) intersecte le plan (ABC) en un unique point qu'on nommera E, et qui a pour coordonnées E(-2;1;0).

4. Soit H(-2;1;0).
4.a. Montrer que H est le projeté orthogonal de A sur (d).
4.b. En déduire la distance du point A à la droite (d).
4.c. Montrer que le triangle AHE est rectangle et que son aire est égale à $\sqrt{19}$ unité d'aire.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1.a. A(-1;1;1) B(1 ;-6 ;-1) C(-5;2;3)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-7\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}2=-4\lambda\\-7=\lambda\\-2=2\lambda\end{cases}$

Donc il n'existe pas λ tel que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A ; B et C ne sont pas alignés et ils déterminent un plan.

1.b. Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si et seulement si le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC) par exemples $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}6\\-2\\13\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-7\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=6\times2-2\times(-7)+13\times(-2)=12+14-26=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=6\times(-4)-2\times1+13\times2=-24-2+26=0$

$\vec{n}$ est donc un vecteur normal au plan (ABC).

1.c. $\vec{n}$ étant un vecteur normal au plan (ABC)

$(ABC):\ 6x-2y+13z+d=0$

A(-1;1;1) appartient au plan (ABC)

$6\times(-1)-2\times1+13+d=0 \Leftrightarrow -6-2+13+d=0 \Leftrightarrow d=-5$

$(ABC):\ 6x-2y+13z-5=0$

2. $(P):\ 8x-2y-4z+18=0$

$\vec{N}\begin{pmatrix}8\\-2\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P) $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\-2\\13\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

$\vec{n}.\vec{N}=6\times8-2\times(-2)+13\times(-4)=48+4-52=0$

Donc les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.

3. Pour déterminer l'intersection du plan (ABC) et de la droite (d), on résout le système :

$$\begin{cases}6x-2y-13z-5=0\\x=-4+t\\y=-11+6t\\z=2-t\end{cases}$$

On obtient : $6\times(-4+t)-2\times(-11+6t)+13\times(2-t)-5=0 \Leftrightarrow -24+6t+22-12t+26-13t-5=0$

$\Leftrightarrow -19t+19=0 \Leftrightarrow t=1$

$x=-4+1=-3$ $y=-11+6=+5$ $z=2-1=1$

Le point d'intersection de la droite (d) et du plan (ABC) est le point E(-3 ;-5;1).

4.a. Le point H(-2;1;0) est le projeté orthogonal de A sur (d) si et seulement si $H\in(d)$ et que les droites (AH) et (d) soient perpendiculaires.

$\begin{cases}-2=-4+t\\1=-11+6t\\0=2-t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=2\\6t=12\\t=2\end{cases} \Leftrightarrow \{t=2$ donc le point H appartient à la droite (d).

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{u}.\overrightarrow{AH}=1\times(-1)+6\times0-1\times(-1)=-1+0+1=0$.

Donc le point H est le projeté orthogonal de A sur (d).

4.b. La distance du point A à la droite (d) est égale à (AH).

$AH^2=(-1)^2+0^2+1^2=2$ $AH=\sqrt{2}$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

4.c. Le point E appartient à la droite (d) donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{EH}=0$ et le triangle AHE est rectangle en H.

L'aire (en unité d'aire) du triangle AHE est égale à : $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\times AH\times EH$.

$\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}$ $EH^2=1^2+6^2+(-1)^2=1+36+1=38$ $EH=\sqrt{38}$

$\frac{1}{2}\times AH\times EH=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{38}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2\times38}=\frac{1}{2}\times\sqrt{4\times19}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{19}=\sqrt{19}$

$\mathcal{A}=\sqrt{19}$ en unité d'aire.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés