Exercice 1 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse.
Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{(x^2)}$.

Affirmation 1 :
f est concave sur $]-\infty ; 0]$.

2. Un refuge spécialisé accueille 24 rapaces numérotés de 1 à 24. Le refuge travaille avec trois vétérinaires. Afin d'administrer un soin à tous les oiseaux, le directeur veut donc former trois groupes numérotés de 1 à 3, constitués chacun de 8 rapaces.

Affirmation 2 :
Le nombre de façons de répartir les rapaces dans les groupes 1 à 3 est : $\dfrac{24!}{(8!)^3}$.

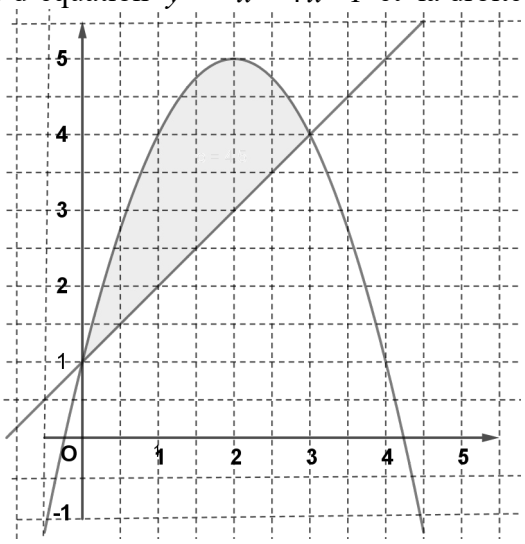
3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle : $y' = -y + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 3 :
La fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - 1$ vérifie : $g' = -g$.

4. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

Affirmation 4 :
La suite (u_n) n'admet pas de limite.

5. On a tracé ci-dessous la parabole d'équation $y = -x^2 + 4x + 1$ et la droite d'équation $y = x + 1$.



Affirmation 5 :
L'aire du domaine grisé est égale à $6{,}5$ en unité d'aire.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

$x\in\mathbb{R}$ $f(x)=xe^{(x^2)}$ f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$u_1(x)=x$ $u_1'(x)=1$ $v(x)=e^{(x^2)}$ $v'(x)=2xe^{(x^2)}$

$f'(x)=e^{(x^2)}+x\times(2xe^{(x^2)})=(2x^2+1)e^{(x^2)}$

$u_2(x)=2x^2+1$ $u_2'(x)=4x$ $v(x)=e^{(x^2)}$ $v'(x)=2xe^{(x^2)}$

$f''(x)=4xe^{(x^2)}+(2x^2+1)\times(2xe^{(x^2)})=4xe^{(x^2)}+(4x^3+2x)e^{(x^2)}=(4x^3+6x)e^{(x^2)}$

$f''(x)=2x(2x^2+3)e^{(x^2)}$

Pour tout nombre réel x, $2x^2+3>0$ et $e^{(x^2)}>0$ donc le signe de $f''(x)$ est le signe de 2x.

Si $x\in]-\infty;0]$ alors $f''(x)\leqslant 0$ et f est concave sur $]-\infty;0]$.

2. Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

Pour les 24 rapaces ont doit former 3 groupes de 8.

Pour le 1er groupe de 8 rapaces il y a : $\binom{24}{8}$ possibilités.

Pour le 2ème groupe de 8 rapaces il y a : $\binom{16}{8}$ possibilités.

Pour le 3ème groupe de 8 rapaces il y a : $\binom{8}{8}$ possibilités.

$\binom{24}{8}=\frac{24!}{8!(24-8)!}=\frac{24!}{8!16!}$ $\binom{16}{8}=16!\times 8!(1-8)!=\frac{16!}{8!8!}$ $\binom{8}{8}=1$

Pour les 3 groupes de 8 rapaces il y a : $\frac{24!}{8!16!}\times\frac{16!}{8!8!}\times 1=\frac{24!}{(8!)^3}$ possibilités.

3. Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

$x\in\mathbb{R}$ f est une solution de l'équation différentielle $y'=-y+1$ donc $f'(x)=-f(x)+1$

$g(x)=f(x)-1$ donc $g'(x)=f'(x)=-f(x)+1=-(f(x)-1)=-g(x)$ et $g'=-g$.

4. Affirmation 4 : FAUSSE

Preuve

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $-1\leqslant\sin(n)\leqslant 1$ et $-\frac{1}{n}\leqslant\frac{\sin(n)}{n}\leqslant\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$ le théorème des gendarmes nous permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n}=0$.

5. Affirmation 5 : FAUSSE

Preuve

$x\in\mathbb{R}$ $f(x)=-x^2+4x+1$ $g(x)=x+1$

Le domaine grisé est la partie de plan comprise entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle [0;3].

L'aire (en unité d'aire) du domaine grisé est égale à : $\mathscr{A}=\int_1^3(f(x)-g(x))dx$.

$h(x)=f(x)-g(x)=-x^2+3x$ $H(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2$ H est une primitive de h sur [0;3].

$\mathscr{A}=[H(x)]_0^3=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}=4,5\neq 6,5$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés